

Fenômenos Mecânicos

Aula de Laboratório 1

BCJ0204-15SB

São Bernardo do Campo

Professor: **James Moraes de Almeida**

james.almeida@ufabc.edu.br

**[https://sites.google.com/view/
jmalmeida](https://sites.google.com/view/jmalmeida)**



Informações

- Tomem cuidado com o laboratório.
 - Não quebrem nada, reposição é complicada.
 - Cuidado para evitar acidentes.

Notação Científica

- Maneira compacta de escrever números muito grandes ou muito pequenos.

$$10^{-4} = 0,0001$$

$$10^{-3} = 0,001$$

$$10^{-2} = 0,01$$

$$10^{-1} = 0,1$$

$$10^0 = 1$$

$$10^1 = 10$$

$$10^2 = 100$$

$$10^3 = 1.000$$

$$10^4 = 10.000$$

Notação Científica

- Maneira compacta de escrever números muito grandes ou muito pequenos.

$$10^{-4} = 0,0001$$

$$10^{-3} = 0,001$$

$$10^{-2} = 0,01$$

$$10^{-1} = 0,1$$

$$10^0 = 1$$

$$10^1 = 10$$

$$10^2 = 100$$

$$10^3 = 1.000$$

$$10^4 = 10.000$$

$$0,0000000000000000000000003435 = 3,435 * 10^{-20}$$

$$4766500000000000000000000000 = 4,7665 * 10^{23}$$

Notação Científica

- Maneira compacta de escrever números muito grandes ou muito pequenos.

$$10^{-4} = 0,0001$$

$$10^{-3} = 0,001$$

$$10^{-2} = 0,01$$

$$10^{-1} = 0,1$$

$$10^0 = 1$$

$$10^1 = 10$$

$$10^2 = 100$$

$$10^3 = 1.000$$

$$10^4 = 10.000$$

$$0,00000000000000000000000003435 = 3,435 \times 10^{-20}$$

$$4766500000000000000000000000 = 4,7665 \times 10^{23}$$

Avogadro's number	N_A	6.022142×10^{23} particles/mol
Boltzmann's constant	k	1.380650×10^{-23} J/K
Bohr magneton	$m_B = e\hbar$	$9.2740095 \times 10^{-24}$ J/T
Coulomb constant	$k = 1/4\pi\epsilon_0$	8.987551788×10^9 N·m ² /C ²
Compton wavelength	$\lambda_c = h/m_e c$	$2.42631024 \times 10^{-12}$ m
Fundamental charge	e	1.602176×10^{-19} C
Gas constant	$R = N_A k$	8.31447 J/mol·K = $1.987\ 22$ cal/mol·K = 8.20578×10^{-2} L·atm/mol·K
Gravitational constant	G	6.6742×10^{-11} N·m ² /kg ²
Mass, of electron	m_e	9.109382×10^{-31} kg = 510.9989 keV/c ²
of proton	m_p	1.672622×10^{-27} kg

Notação Científica

- Convenção de símbolos para potência de 10.

Potências de Dez	Número	Símbolo
10^{-18}	0.000000000000000001	a (atto)
10^{-15}	0.000000000000001	f (femto)
10^{-12}	0.000000000001	p (pico)
10^{-9}	0.000000001	n (nano)
10^{-6}	0.000001	μ (micro)
10^{-3}	0.001	m (mili)
10^{-2}	0.01	c (centi)
10^{-1}	0.1	d (deci)
10^0	1	
10^1	10	da (deca)
10^2	100	h (hecto)
10^3	1000	k (quilo)
10^6	1000000	M (mega)
10^9	1000000000	G (giga)
10^{12}	1000000000000	T (tera)
10^{15}	1000000000000000	P (peta)
10^{18}	1000000000000000000	E (exa)

$$1 \text{ cm} = 0,01 \text{ m} = 10^{-2} \text{ m}$$

$$1 \text{ kg} = 1000 \text{ g} = 10^3 \text{ g}$$

$$1 \text{ nm} = 0,000000001 \text{ m}$$

$$1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$$

Notação Científica

- Manipulação de números com notação científica.

- Exemplo 1:

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{(4 \times 10^5) \times (1,5 \times 10^{15})}{3 \times 10^8}} &= \sqrt{\frac{(4 \times 1,5) \times (10^5 \times 10^{15})}{3 \times 10^8}} = \sqrt{\frac{(4 \times 1,5)}{3} \times \frac{(10^5 \times 10^{15})}{10^8}} = \\ &= \sqrt{2 \times \frac{10^{20}}{10^8}} = \sqrt{2 \times 10^{12}} = \sqrt{2} \times 10^{12 \times 0,5} = 1,41 \times 10^6\end{aligned}$$

- Exemplo 2:

$$\sqrt{\frac{4 \times 10^5 \times 1,5 \times 10^{15}}{3 \times 10^{-6}}} = \sqrt{\frac{4 \times 1,5}{3} \times \frac{10^5 \times 10^{15}}{10^{-6}}} = \sqrt{2} \times \left(\frac{10^{20}}{10^{-6}} \right)^{0,5} = 1,41 \times (10^{26})^{0,5} = 1,41 \times 10^{13}$$

Notação Científica

- Manipulação de números com notação científica.

- Exemplo 1:

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{(4 \times 10^5) \times (1,5 \times 10^{15})}{3 \times 10^8}} &= \sqrt{\frac{(4 \times 1,5) \times (10^5 \times 10^{15})}{3 \times 10^8}} = \sqrt{\frac{(4 \times 1,5)}{3} \times \frac{(10^5 \times 10^{15})}{10^8}} = \\ &= \sqrt{2 \times \frac{10^{20}}{10^8}} = \sqrt{2 \times 10^{12}} = \sqrt{2} \times 10^{12 \times 0,5} = 1,41 \times 10^6\end{aligned}$$

- Exemplo 2:

$$\sqrt{\frac{4 \times 10^5 \times 1,5 \times 10^{15}}{3 \times 10^{-6}}} = \sqrt{\frac{4 \times 1,5}{3} \times \frac{10^5 \times 10^{15}}{10^{-6}}} = \sqrt{2} \times \left(\frac{10^{20}}{10^{-6}} \right)^{0,5} = 1,41 \times (10^{26})^{0,5} = 1,41 \times 10^{13}$$

Unidades e Medições

PARTE 1: O QUE SIGNIFICA MEDIR?



Unidades e Medições

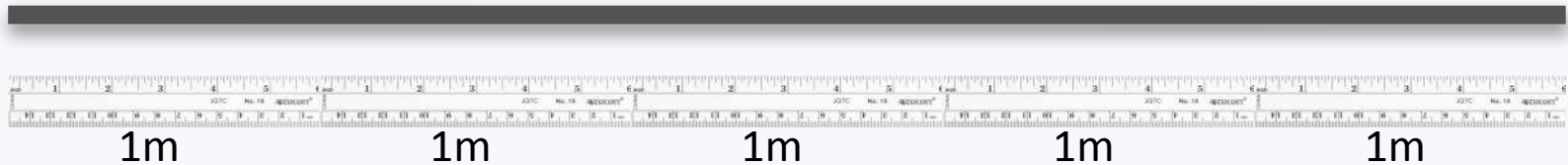
- Algumas quantidades podem ser representadas diretamente por um número.
 - Por exemplo: o número de moléculas de gás num compartimento.
 - Tais grandezas são ditas adimensionais ou sem dimensão.
 - Geralmente, são grandezas relacionadas a uma contagem, ou são obtidas pela razão entre grandezas dimensionais.

Unidades e Medições

- A maioria das grandezas de interesse não é bem especificada por um número apenas!
 - Por exemplo: não faz sentido dizer que um fio mede 5.
 - Faz sentido dizer que um fio mede 5m, ou 5 jardas. Mas o que isso significa?
-

Unidades e Medições

- Dizer que o fio vale 5m significa que este fio é cinco vezes mais longo do que um comprimento padronizado, que chamamos de “1 metro”.



- MEDIR um comprimento significa comparar uma propriedade (a dimensão linear, o tamanho) com a de outro objeto, considerado como um padrão (ou unidade).
 - Quando isso acontece, dizemos que essa grandeza é dimensional. No caso, falamos de dimensão de comprimento.
- Mas qual é o tamanho de uma régua de 1m?
 - ISSO É UMA CONVENÇÃO.

Unidades e Medições

- O metro foi originalmente definido, em 1795, como $1/10.000.000$ da distância entre o pólo norte e o equador, medido no meridiano que passa por Paris.



- Entre 1799 e 1960, barras metálicas (de platina, e posteriormente irídio-platina) foram utilizadas como padrão para o metro.



Unidades e Medições

- Em 1960, passou-se a utilizar o comprimento de onda de uma transição atômica do Kriptônio como referência para o metro.
- Esse tipo de definição tem a vantagem de não depender de um objeto físico particular, que pode, por exemplo, ser destruído por uma catástrofe! Mais que isso, ela proporciona maior estabilidade e precisão para a definição do metro.
- Em 1983, adotou-se o padrão atual: o metro é definido como a distância percorrida pela luz no vácuo durante um intervalo de tempo de $1/299.792.458$ segundos.

Unidades e Medições

- COMPRIMENTO é uma grandeza dimensional, que quantifica o “tamanho” de um objeto numa dada direção linear.
- É uma grandeza que precisa ser expressa em termos de uma unidade. Todo comprimento é expresso através da comparação com uma referência padrão, considerado como “unidade de comprimento”.
- Um número que expressa um comprimento é dito possuir dimensão de comprimento — independente da unidade escolhida.

Unidades e Medições

- Outra grandeza fundamental que queremos medir é o TEMPO.
 - O que é o tempo?

“se ninguém me perguntar, eu sei; se o quiser explicar a quem me fizer a pergunta, já não sei”

Agostinho de Hipona (Santo Agostinho) 300BC

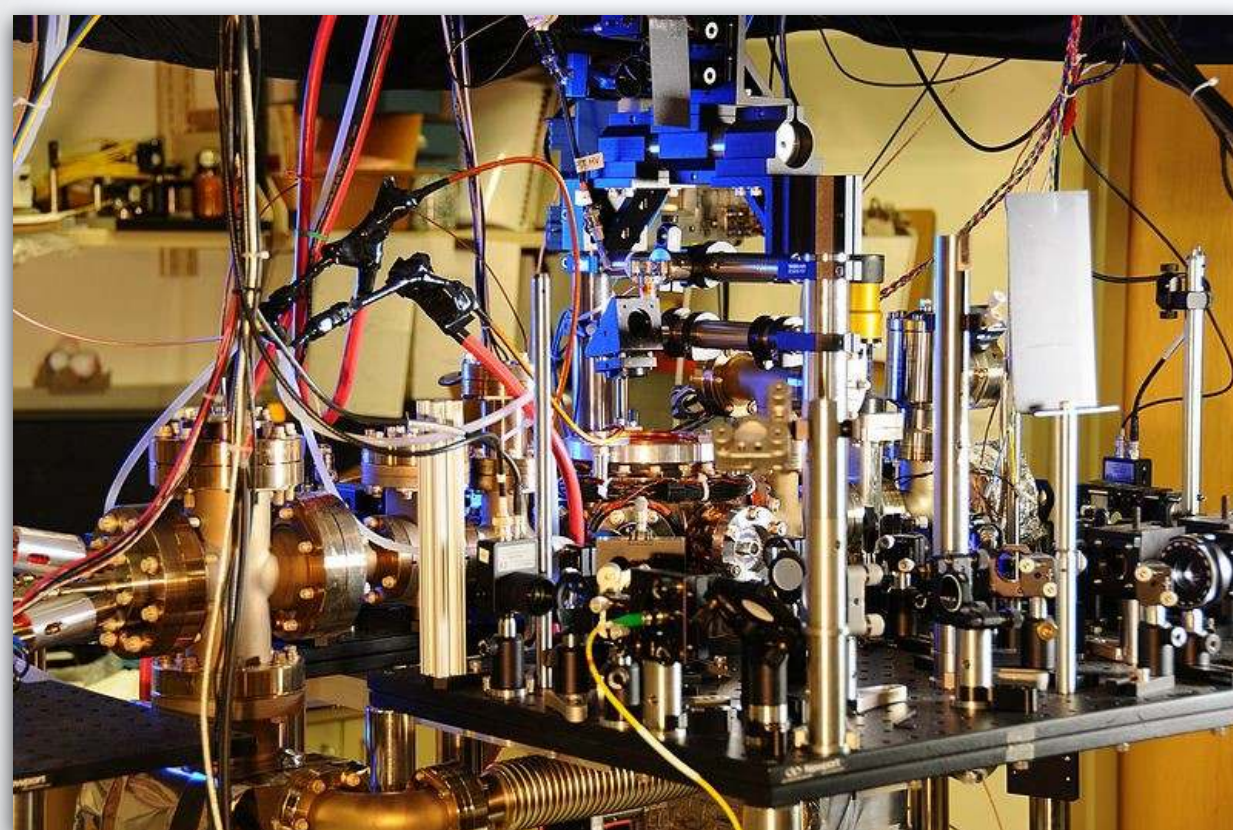


- Na prática, a passagem do tempo é medida através de algum sistema periódico (um relógio).
- Exemplos primitivos: um pêndulo, a pulsação cardíaca, o ciclo dia-e-noite.

Unidades e Medições

- O segundo foi inicialmente definido como $1/86.400$ de um dia solar. Contudo, a velocidade de rotação da Terra varia lentamente, então esta não é uma definição estável para o segundo.
- Atualmente, o segundo é definido a partir das propriedades atômicas do átomo de Césio-133. Esta definição é conveniente pois sabemos que os átomos de Césio se comportam da mesma forma, independente da rotação da Terra ou de outros fatores.

Unidades e Medições



Relógio atômico baseado em Itérbio (Yb), nos EUA: este relógio é tão preciso que espera-se um atraso de cerca de 1s ao longo de toda a idade do universo (+ de 10 bilhões de anos!).

Unidades e Medições

- Outra grandeza fundamental é a MASSA.
- A massa está ligada à inércia de um corpo. A definição precisa do que é massa será vista no curso de Fenômenos Mecânicos.
 - Nunca é demais lembrar: **MASSA** não é o mesmo que **PESO**.
- Até 2019, o padrão internacional de massa era um cilindro de liga platina-irídio, guardada num centro de metrologia em Sèvres, na França.



Unidades e Medições

- Em 20 de maio de 2019, o padrão internacional do quilograma foi alterado.
 - A definição atual do quilograma é baseada no valor de uma constante universal da física, a constante de Planck, que pode ser medida com muita precisão.
 - Um quilograma é definido como: a massa tal que a constante de Planck vale exatamente $h = 6.62607015 \times 10^{-34} \text{ kg m}^2 / \text{s}$.
- Pode não parecer uma definição muito prática, mas assim como as definições correntes para o metro e o segundo, ela pode ser aferida com muita precisão através de experimentos adequados, e independe da existência e estabilidade de um sistema físico específico.

Unidades e Medições

- Comprimento, tempo e massa são dimensões básicas.
- Outras grandezas, também dimensionais, podem ser consideradas derivadas, por exemplo:
 - velocidade é definida como uma razão entre comprimento e tempo
 - aceleração é definida como uma razão entre velocidade e tempo
 - força é definida como um produto entre massa e aceleração

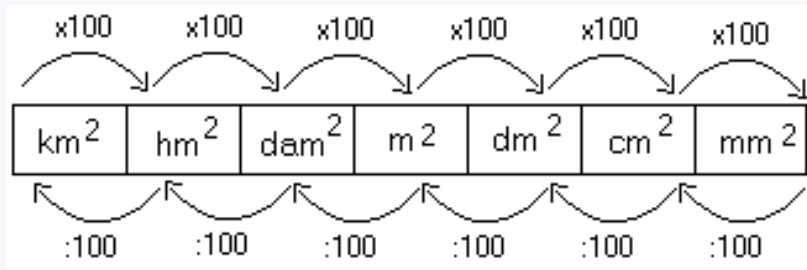
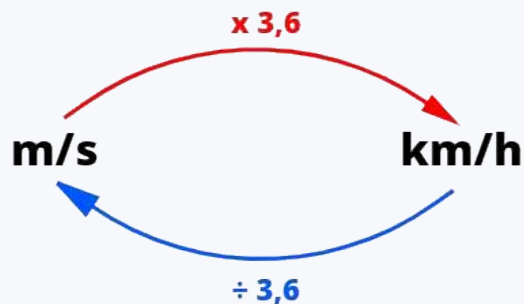
Unidades e Medições

- Em 1975, um acordo internacional instituiu o SI – Sistema Internacional de Unidades, que define grandezas e unidades básicas. Todas as demais grandezas usadas na ciência são derivadas destas grandezas básicas.

Grandeza	Unidade	Símbolo
Comprimento	metro	m
Massa	quilograma	kg
Tempo	segundo	s
Corrente elétrica	ampère	A
Temperatura termodinâmica	kelvin	K
Quantidade de matéria	mol	mol ^[8]
Intensidade luminosa	candela	cd

Unidades e Medições

PARTE 2: ANÁLISE DIMENSIONAL, TRANSFORMAÇÃO DE UNIDADES



$1\text{km} = 1000\text{m}$	$1\text{dia} = 24\text{h}$	$1\text{N.m} = 1\text{J}$
$1\text{m} = 100\text{cm}$	$1\text{h} = 60\text{min}$	$1\text{cal} \approx 4,2\text{J}$
$1\text{cm} = 10\text{mm}$	$1\text{min} = 60\text{s}$	$1\text{kWh} = 3,6 \times 10^6\text{J}$
$1\text{pol (in)} = 2,54\text{cm}$	$1\text{h} = 3600\text{s}$	
$1\text{pé (ft)} = 30,48\text{cm}$		$1\text{m}^3 = 10^3\text{l}$
$1\text{milha (mi)} = 1609\text{m}$	$1\text{ton} = 10^3\text{kg}$	$1\text{ml} = 1\text{cm}^3$
$1\text{jarda (Yd)} \approx 0,91\text{m}$	$1\text{kg} = 10^3\text{g}$	$1000\text{ml} = 1\text{l}$
	$1\text{onça (oz)} = 28,7\text{g}$	$1\text{galão (gal)} = 4,55\text{l}$
$1\text{kg/m}^3 = 10^3\text{g/m}^3$	$1\text{libra (lb)} = 454\text{g}$	
$1\text{kg/l} = 10^3\text{kg/m}^3$		$1\text{A} = 1\text{C/s}$
$1\text{g/cm}^3 = 10^3\text{kg/m}^3$	$1\text{m/s} = 3,6\text{km/h}$	$1\text{V} = 1\text{J/C}$
	$1\text{mph} \approx 1,6\text{km/h}$	
$1\text{J/s} = 1\text{W}$		$1\text{Pa} = 1\text{N/m}^2$
$1\text{cv} \approx 735\text{W}$	$1\text{Kgf} = 9,8\text{N}$	$1\text{atm} = 760\text{mmHg}$
$1\text{HP} = 746\text{W}$		$1\text{atm} \approx 10^5\text{N/m}^2$
		$1\text{N/m}^2 \approx 10^{-5}\text{kgf/cm}^2$

Unidades e Medições

- Por que saber de tudo isso?
- Uma grandeza física dimensional só está bem definida quando indicamos a unidade utilizada. Assim, se você resolveu um problema, e encontrou como resposta uma velocidade $v = 10$, sua resposta não faz sentido!
- Só faz sentido comparar grandezas de mesma dimensão (mesmo que estejam expressas em unidades diferentes). Faz sentido se perguntar se uma jarda é maior do que um metro, mas não faz sentido se perguntar se um segundo é menor que um quilograma.
- Todos os termos numa dada equação devem necessariamente possuir a mesma dimensão.

Unidades e Medições

- Análise Dimensional: todos os termos de uma fórmula devem ter a mesma dimensão.

- Digamos que num dado problema, você chegou à seguinte solução:

$$v_f^2 = v_0^2 + 2(\Delta x)^2$$

- Isso está correto? Vejamos as unidades:

$$\left. \begin{array}{l} v_f^2 \rightarrow \frac{\text{Comprimento}^2}{\text{Tempo}^2} \\ v_0^2 \rightarrow \frac{\text{Comprimento}^2}{\text{Tempo}^2} \\ 2(\Delta x)^2 \rightarrow \text{Comprimento}^2 \end{array} \right\}$$

Unidades e Medições

- Análise Dimensional: todos os termos de uma fórmula devem ter a mesma dimensão.

- Digamos que num dado problema, você chegou à seguinte solução:

$$v_f^2 = v_0^2 + 2(\Delta x)^2$$

- Isso está correto? Vejamos as unidades:

$$v_f^2 \rightarrow \frac{\text{Comprimento}^2}{\text{Tempo}^2}$$

$$v_0^2 \rightarrow \frac{\text{Comprimento}^2}{\text{Tempo}^2}$$

$$2(\Delta x)^2 \rightarrow \text{Comprimento}^2$$

$$v_f^2 = v_0^2 + 2(\Delta x)^2$$

Unidades e Medições

- Análise Dimensional: todos os termos de uma fórmula devem ter a mesma dimensão.

- Digamos que num dado problema, você chegou à seguinte solução:

$$v_f^2 = v_0^2 + 2(\Delta x)^2$$

- Isso está correto? Vejamos as unidades:

$$\left. \begin{array}{l} v_f^2 \rightarrow \frac{\text{Comprimento}^2}{\text{Tempo}^2} \\ v_0^2 \rightarrow \frac{\text{Comprimento}^2}{\text{Tempo}^2} \\ 2(\Delta x)^2 \rightarrow \text{Comprimento}^2 \end{array} \right\} \quad \frac{\text{Comprimento}^2}{\text{Tempo}^2} = \frac{\text{Comprimento}^2}{\text{Tempo}^2} + \text{Comprimento}^2$$
$$v_f^2 = v_0^2 + 2(\Delta x)^2$$

Unidades e Medições

- Análise Dimensional: todos os termos de uma fórmula devem ter a mesma dimensão.

- Digamos que num dado problema, você chegou à seguinte solução:

$$v_f^2 = v_0^2 + 2(\Delta x)^2$$

- Isso está correto? Vejamos as unidades:

$$\left. \begin{array}{l} v_f^2 \rightarrow \frac{\text{Comprimento}^2}{\text{Tempo}^2} \\ v_0^2 \rightarrow \frac{\text{Comprimento}^2}{\text{Tempo}^2} \\ 2(\Delta x)^2 \rightarrow \text{Comprimento}^2 \end{array} \right\} \quad \frac{\text{Comprimento}^2}{\text{Tempo}^2} = \frac{\text{Comprimento}^2}{\text{Tempo}^2} + \text{Comprimento}^2$$

Algo está errado!

Unidades e Medições

- Qual é o problema?

$$\frac{\text{Comprimento}^2}{\text{Tempo}^2} = \frac{\text{Comprimento}^2}{\text{Tempo}^2} + \text{Comprimento}^2$$

- O termo da direita está com a dimensão errada, deveria ser igual aos outros termos. A expressão correta seria:

$$v_f^2 = v_0^2 + 2a\Delta x$$

$$\frac{\text{Comprimento}^2}{\text{Tempo}^2} = \frac{\text{Comprimento}^2}{\text{Tempo}^2} + \frac{\text{Comprimento}}{\text{Tempo}^2} \times \text{Comprimento}$$

$$\frac{\text{Comprimento}^2}{\text{Tempo}^2} = \frac{\text{Comprimento}^2}{\text{Tempo}^2} + \frac{\text{Comprimento}^2}{\text{Tempo}^2}$$

- Todos na mesma dimensão!

Unidades e Medições

- Conversão de Unidades: podemos converter livremente uma grandeza de uma unidade para outra, desde que mantendo sempre a consistência dimensional.
 - Por exemplo: uma régua de 1 jarda tem o mesmo tamanho que uma régua de 0,9144 metros.

$$1 \text{ jarda} = 0,9144 \text{ metros}$$

- Podemos escrever:

$$\frac{1 \text{ jarda}}{0,9144 \text{ metros}} = 1$$

$$\frac{0,9144 \text{ metros}}{1 \text{ jarda}} = 1$$

Unidades e Medições

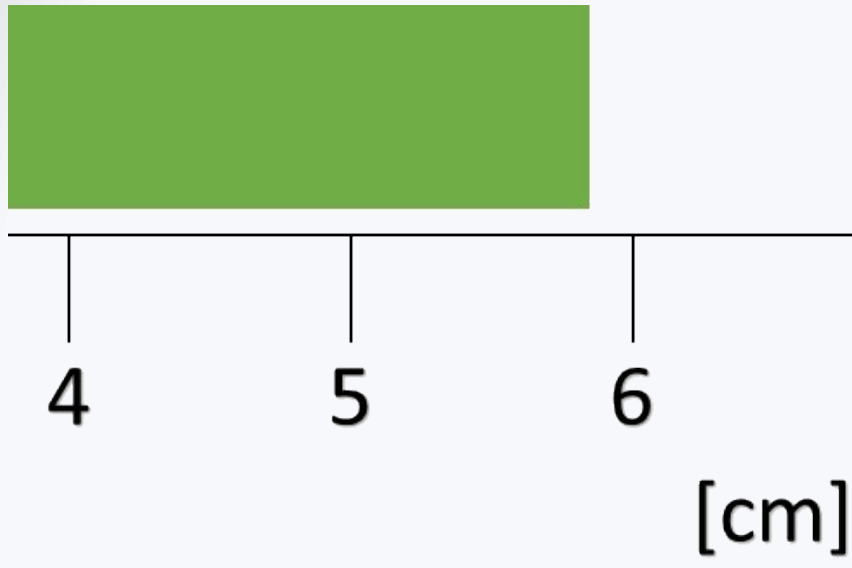
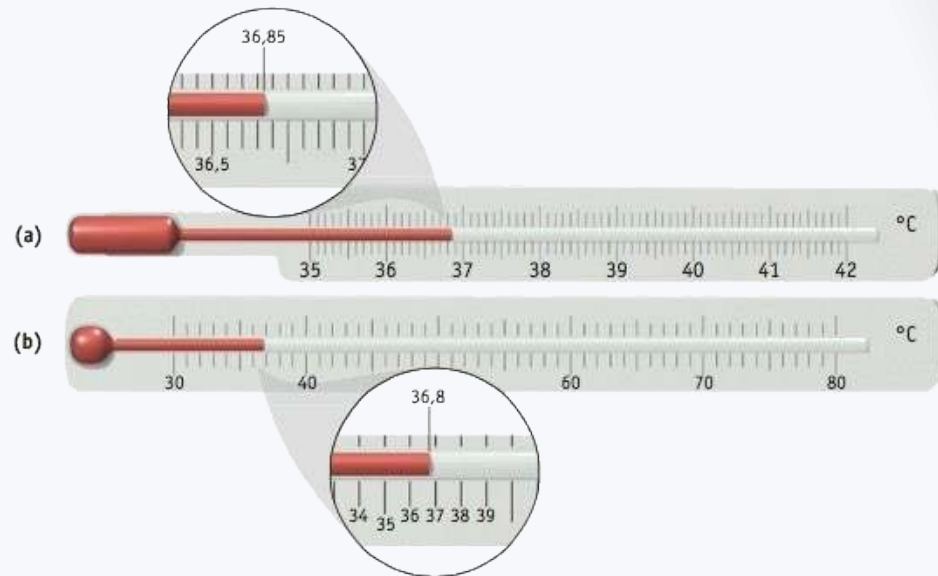
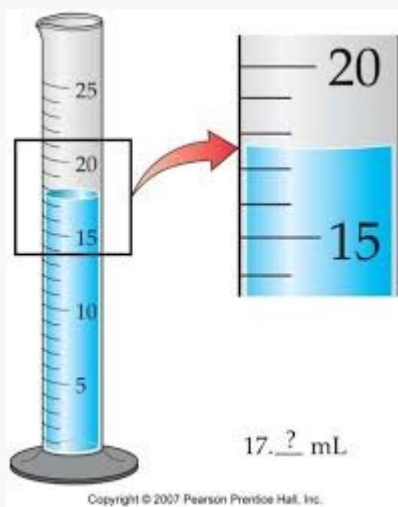
- Então, sendo: $\frac{0,9144 \text{ metros}}{1 \text{ jarda}} = 1$

$$15 \text{ jardas} = 15 \text{ jardas} \times \frac{0,9144 \text{ m}}{1 \text{ jarda}} = 15 \times 0,9144 \text{ m} = 13,71 \text{ m}$$

- E utilizando: $\frac{1 \text{ jarda}}{0,9144 \text{ metros}} = 1$

$$20 \text{ m} = 20 \text{ m} \times \frac{1 \text{ jarda}}{0,9144 \text{ m}} = \frac{20}{0,9144} \text{ jardas} = 21,87 \text{ jardas}$$

Algarismos Significativos

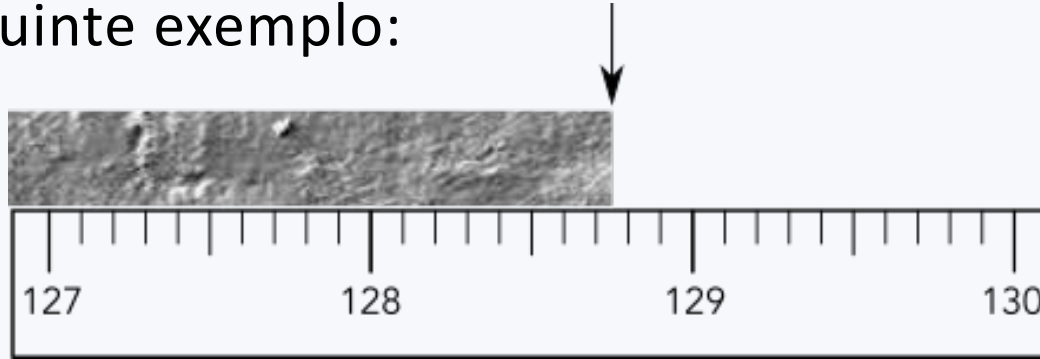


Algarismos Significativos

- O resultado de uma medida deve conter as seguintes informações:
 - O valor da grandeza.
 - A incerteza da medição.
 - A unidade (caso pertinente).
- Vamos ver agora como podemos estimar a incerteza de uma das medidas mais simples que podemos fazer: medir o comprimento de um objeto usando uma régua.

Algarismos Significativos

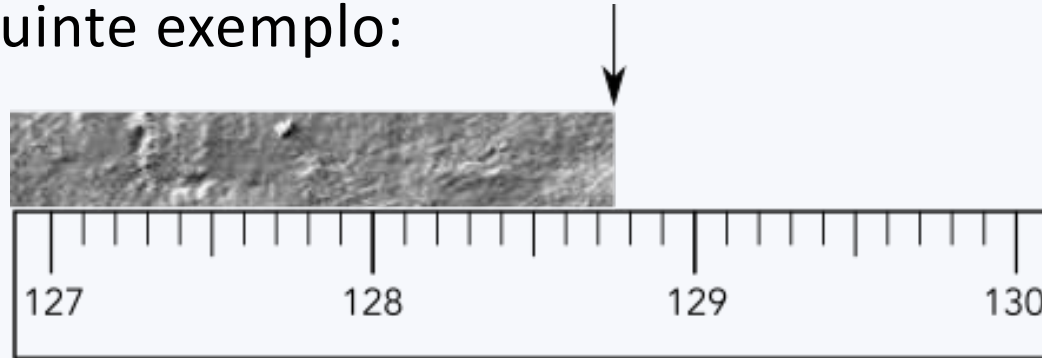
- Veja o seguinte exemplo:



- A leitura da régua está certamente entre 128,7cm e 128,8cm.

Algarismos Significativos

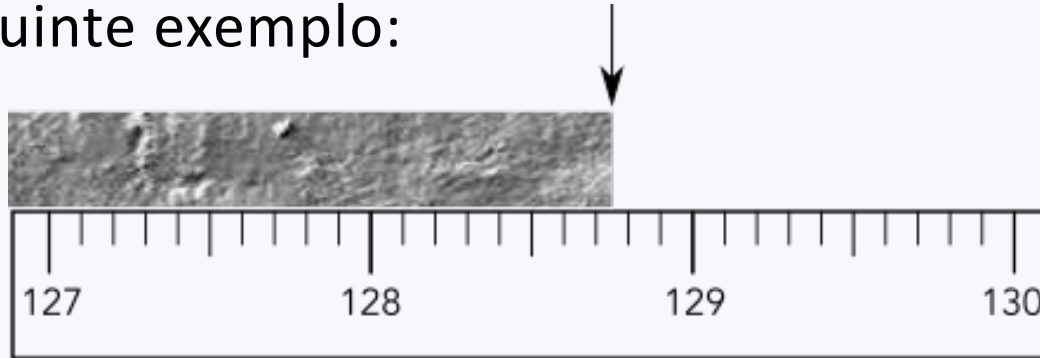
- Veja o seguinte exemplo:



- A leitura da régua está certamente entre 128,7cm e 128,8cm.
 - Valor medido: $x_{\text{medio}} \pm \delta x$

Algarismos Significativos

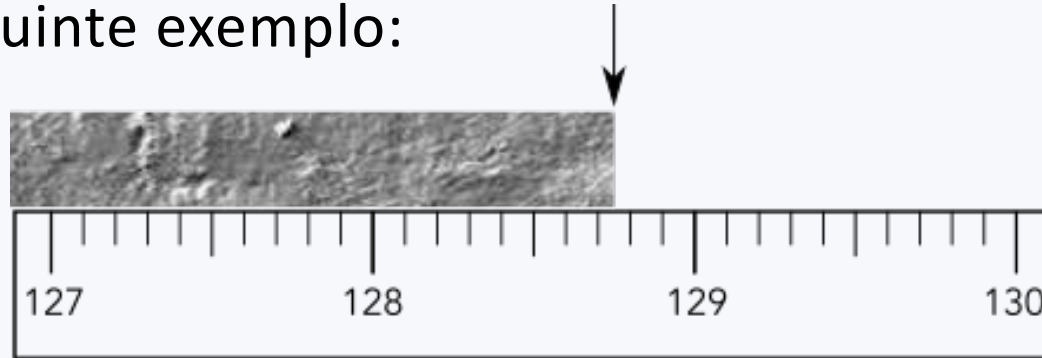
- Veja o seguinte exemplo:



- A leitura da régua está certamente entre 128,7cm e 128,8cm.
 - Valor medido: $x_{\text{medio}} \pm \delta x$
 - Qual a incerteza?
 - 0,1cm em total: 0,05cm para mais e para menos.
 δx = metade da menor graduação do instrumento

Algarismos Significativos

- Veja o seguinte exemplo:

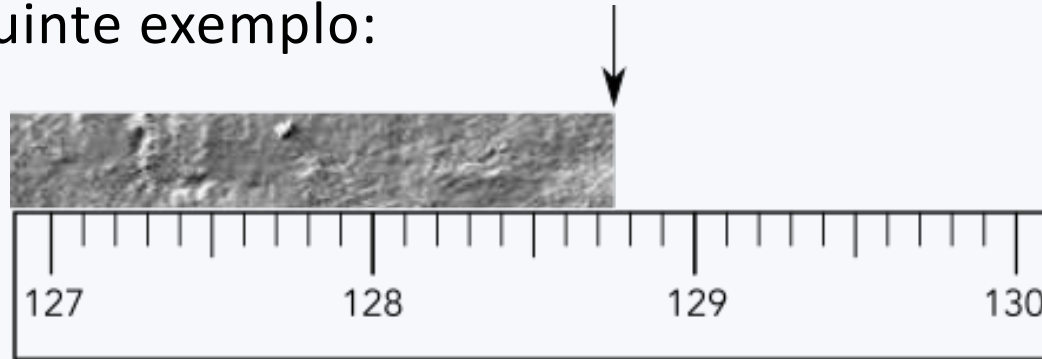


- A leitura da régua está certamente entre 128,7cm e 128,8cm.
 - Valor medido: $x_{\text{medio}} \pm \delta x$
 - Qual a incerteza?
 - 0,1cm em total: 0,05cm para mais e para menos.
 $\delta x = \text{metade da menor graduação do instrumento}$

$$L = 128,75 \pm 0,05 \text{ cm}$$

Algarismos Significativos

- Veja o seguinte exemplo:



- A leitura da régua está certamente entre 128,7cm e 128,8cm.

- Valor medido: $x_{\text{medio}} \pm \delta x$

- Qual a incerteza?

- 0,1cm em total: 0,05cm para mais e para menos.

$$L = 128,75 \pm 0,05 \text{ cm}$$

δx = metade da menor graduação do

instrumento

- O mesmo vale para: medida de ângulos usando um transferidor, temperatura usando um termômetro de mercúrio, etc...

Algarismos Significativos

- Em casos mais complicados, tanto a medida quanto a incerteza podem resultar em números “quebrados”, aí temos que arredondar de uma forma consistente.

- Note que não faz sentido escrever, por exemplo:

$$g = 9,82435 \pm 0,03 \text{ m/s}^2$$

- Por outro lado, δx será sempre uma estimativa da incerteza, também não fará sentido expressá-lo com muita precisão. Por exemplo:

$$g = 9,82 \pm 0,034594 \text{ m/s}^2$$

- O arredondamento tanto da incerteza quanto da medida deve ser consistente:

$$g = 9,82 \pm 0,03 \text{ m/s}^2$$

Algarismos Significativos

- Algarismos significativos:
 - São os algarismos sobre os quais temos algum conhecimento de uma dada grandeza, excluindo eventuais zeros à esquerda, usados para acertos de unidades, e potências de dez.
 - Atenção: zeros à direita contam como algarismos significativos!
 - Quem vai determinar o número de algarismos significativos da grandeza medida será a sua incerteza estimada.

MEDIDA (mm)	Algarismos Significativos
57,896	5
$5,79 \times 10^4$	3
$5,789600 \times 10^4$	7
$0,007 \times 10^4$	1

Algarismos Significativos

- Regras práticas para apresentação de resultados:
 - Durante os cálculos intermediários, tanto da grandeza de interesse quando da sua incerteza, utilize todos (ou pelo menos um número apreciável) dos algarismos que a calculadora apresenta.
 - Os arredondamentos serão sempre a última etapa.

Algarismos Significativos

- Regras de arredondamento:

- Existe uma regra oficial de arredondamento dada pela ABNT NBR 5891.

Mas, é uma regra arbitrária, não estando de acordo com a matemática.

- Porém é necessário usá-la em relatórios técnicos.

- Como arredondar números:

$\downarrow$
3,14159265359 $\rightarrow$ 3,1416

- Dado o número de algarismos significativos desejado, observe o número seguinte:

- Se for 0, 1, 2, 3 ou 4: O último algarismo significativo não se altera.
 - Se for 5, 6, 7, 8 ou 9: O último algarismo significativo é somado de 1.

$\downarrow$
3,14159265359 $\rightarrow$ 3,142

$\downarrow$
3,14159265359 $\rightarrow$ 3,14

Algarismos Significativos

- Regras de arredondamento:
 - Sempre arredonde a incerteza para um algarismo significativo:
 - $5,30 \pm 0,0572 \rightarrow 5,30 \pm 0,06$
 - Arredonde então o valor da grandeza, para que o último algarismo significativo do valor medido seja da mesma ordem de grandeza (mesma casa decimal) que a incerteza.
 - $5,301763245986 \pm 0,06 \rightarrow 5,30 \pm 0,06$
 - $1423,923654 \pm 0,18724 \rightarrow 1423,923654 \pm 0,2 \rightarrow 1423,9 \pm 0,2$
 - $987649625,81 \pm 0,1 \rightarrow 987649625,8 \pm 0,1 \rightarrow 9,876496258 \times 10^8 \pm 1 \times 10^{-1}$

Algarismos Significativos

- Regras de arredondamento:
 - Sempre arredonde a incerteza para um algarismo significativo:
 - $5,30 \pm 0,0572 \rightarrow 5,30 \pm 0,06$
 - Arredonde então o valor da grandeza, para que o último algarismo significativo do valor medido seja da mesma ordem de grandeza (mesma casa decimal) que a incerteza.
 - $5,301763245986 \pm 0,06 \rightarrow 5,30 \pm 0,06$
 - $1423,923654 \pm 0,18724 \rightarrow 1423,923654 \pm 0,2 \rightarrow 1423,9 \pm 0,2$
 - $987649625,81 \pm 0,1 \rightarrow 987649625,8 \pm 0,1 \rightarrow 9,876496258 \times 10^8 \pm 1 \times 10^{-1}$

Algarismos Significativos

- Regras de arredondamento:

- Sempre arredonde a incerteza para um algarismo significativo:
 - $5,30 \pm 0,0572 \rightarrow 5,30 \pm 0,06$
- Arredonde então o valor da grandeza, para que o último algarismo significativo do valor medido seja da mesma ordem de grandeza (mesma casa decimal) que a incerteza.
 - $5,301763245986 \pm 0,06 \rightarrow 5,30 \pm 0,06$
 - $1423,923654 \pm 0,18724 \rightarrow 1423,923654 \pm 0,2 \rightarrow 1423,9 \pm 0,2$
 - $987649625,81 \pm 0,1 \rightarrow 987649625,8 \pm 0,1 \rightarrow 9,876496258 \times 10^8 \pm 1 \times 10^{-1}$

Algarismos Significativos

- Regras de arredondamento:
 - Exemplos:
 - Valor calculado: 56,745737703 m/s
 - Incerteza calculada: 0,0034593 m/s
 - Incerteza arredondada: 0,003 m/s
 - Valor arredondado: 56,746 m/s
 - Valor calculado: 0,0056745737703 m/s
 - Incerteza calculada: 0,000037593 m/s
 - Incerteza arredondada: 0,00004 m/s = 0,04 mm/s
 - Valor arredondado: 0,00567 m/s = 5,67 mm/s

Algarismos Significativos

- Alguns instrumentos já tem seu erro definido:



- Caso o erro não seja fornecido utilize a regra:
 - Erro = metade da menor graduação do instrumento.

Algarismos Significativos

- Quando efetuamos várias medidas de uma mesma grandeza, devemos fazer uma análise estatística. Uma vantagem é que erros aleatórios tendem a se cancelar quando fazemos médias de varias observações.
 - Exemplo: Tempo de queda livre de uma bolinha de tênis, lançada a uma altura de $h = 2,00 \pm 0,05$ m, medido com o cronômetro de um telefone celular.

Medida	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t (s)	0,63	0,61	0,67	0,66	0,61	0,68	0,59	0,63	0,58	0,61

Algarismos Significativos

- Como analisar os dados?

Medida	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t (s)	0,63	0,61	0,67	0,66	0,61	0,68	0,59	0,63	0,58	0,61

- Valor médio: $\bar{t} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N t_i$

- Desvio padrão da média: $\sigma_{\bar{t}} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (t_i - \bar{t})^2}$

- Estimativa para o valor e a incerteza da medida: $\bar{t} \pm \sigma_{\bar{t}}$

Algarismos Significativos

- Como analisar os dados?

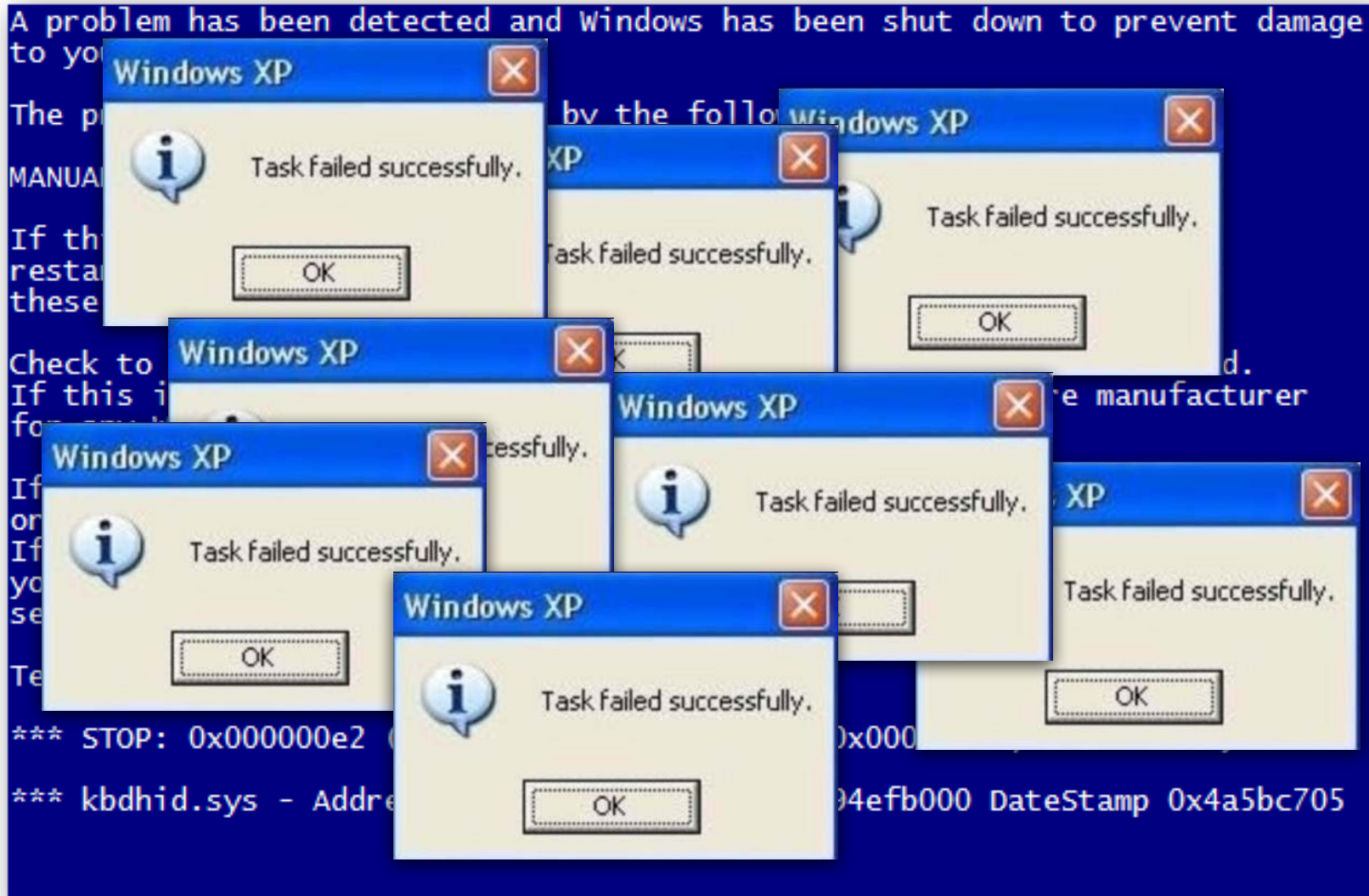
Medida	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t (s)	0,63	0,61	0,67	0,66	0,61	0,68	0,59	0,63	0,58	0,61

- Valor médio: $\bar{t} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N t_i = 0,627 \text{ s}$

- Desvio padrão da média: $\sigma_{\bar{t}} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (t_i - \bar{t})^2} = 0,010651 \text{ s}$

- Estimativa para o valor e a incerteza da medida: $\bar{t} \pm \sigma_{\bar{t}} = 0,63 \pm 0,01 \text{ s}$

Propagação de Erros



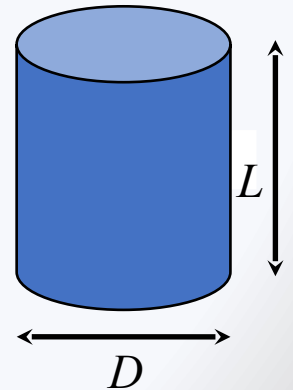
Propagação de Erros

- Você mede o diâmetro e a altura de um cilindro, usando uma régua, fita métrica etc...
- Essas medidas estão associadas a uma incerteza, devida às limitações do instrumento de medida.

$$D = \bar{D} \pm \sigma_D, \quad L = \bar{L} \pm \sigma_L$$

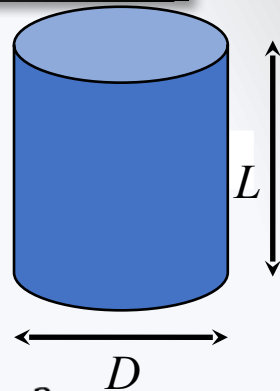
- A partir de D e L , podemos calcular o volume do cilindro através de uma fórmula:

$$V = \pi \frac{D^2}{4} L$$



Propagação de Erros

- O valor de V terá uma incerteza, qual? $V = \pi \frac{D^2}{4} L$
 - Sendo: $D = 5,00 \pm 0,05 \text{ cm}$
 $L = 12,50 \pm 0,05 \text{ cm}$
 - Valor médio: $V = \pi \frac{D^2}{4} L = \pi \frac{(5,00)^2}{4} (12,50) \text{ cm}^3 \approx 245,437 \text{ cm}^3$
 - Como calcular a incerteza de V ?
 - Uma maneira simples: calcular o valor máximo e mínimo possível para V .



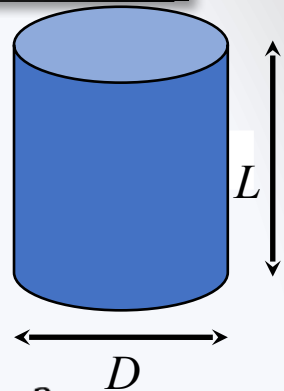
$$V_{max} = \pi \frac{(5,05)^2}{4} (12,55) \text{ cm}^3 \approx 251,372 \text{ cm}^3$$

$$V_{min} = \pi \frac{(4,95)^2}{4} (12,45) \text{ cm}^3 \approx 239,591 \text{ cm}^3$$

$$\delta V = \frac{V_{max} - V_{min}}{2} \approx 5,89058 \text{ cm}^3 \approx 6 \text{ cm}^3$$

Propagação de Erros

- O valor de V terá uma incerteza, qual? $V = \pi \frac{D^2}{4} L$
 - Sendo: $D = 5,00 \pm 0,05 \text{ cm}$
 $L = 12,50 \pm 0,05 \text{ cm}$
 - Valor médio: $V = \pi \frac{D^2}{4} L = \pi \frac{(5,00)^2}{4} (12,50) \text{ cm}^3 \approx 245,437 \text{ cm}^3$
 - Resultado final: $V = 245 \text{ cm}^3 \pm 6 \text{ cm}^3$
 - Esse procedimento de considerar “valores máximos e mínimos” nos dá uma ideia grosseira da incerteza do volume devida à incerteza das medidas do diâmetro e da altura. Mas dá para fazer melhor!



Propagação de Erros

- Dedução envolve derivadas parciais.
- Por enquanto vamos usar as expressões deduzidas:

$w = w(x, y, \dots)$	Expressões para σ_w
$w = x \pm y$ soma e subtração	$\sigma_w^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$ somar as incertezas absolutas em quadratura
$w = axy$ multiplicação	$\left(\frac{\sigma_w}{w}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2$ somar as incertezas relativas em quadratura
$w = a(y/x)$ divisão	$\left(\frac{\sigma_w}{w}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2$ somar as incertezas relativas em quadratura
$w = x^m$ potência simples	$\left \frac{\sigma_w}{w}\right = \left m \frac{\sigma_x}{x}\right $

$w = w(x, y, \dots)$	Expressões para σ_w
$w = ax$ multiplicação por constante	$\left \frac{\sigma_w}{w}\right = \left \frac{\sigma_x}{x}\right \quad \text{ou} \quad \sigma_w = a \sigma_x$
$w = ax + b$	$\left \frac{\sigma_w}{w}\right = \left \frac{\sigma_x}{x}\right \quad \text{ou} \quad \sigma_w = a \sigma_x$
$w = ax^p y^q$	$\left(\frac{\sigma_w}{w}\right)^2 = \left(p \frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(q \frac{\sigma_y}{y}\right)^2$
$w = a \sin(bx)$ função qualquer aplicar a definição	$\sigma_w = ab \cos(bx) \sigma_x \quad b \sigma_x \text{ em radianos}$

- Como fica o caso do volume?

Propagação de Erros

- Como fica o caso do volume?

$$V = \pi \frac{D^2}{4} L$$

$$\left(\frac{\sigma_V}{V}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_{D^2}}{D^2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_L}{L}\right)^2 \qquad \frac{\sigma_{D^2}}{D^2} = 2 \frac{\sigma_D}{D}$$

$$\left(\frac{\sigma_V}{V}\right)^2 = \left(2 \frac{\sigma_D}{D}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_L}{L}\right)^2 = 4 \left(\frac{\sigma_D}{D}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_L}{L}\right)^2$$

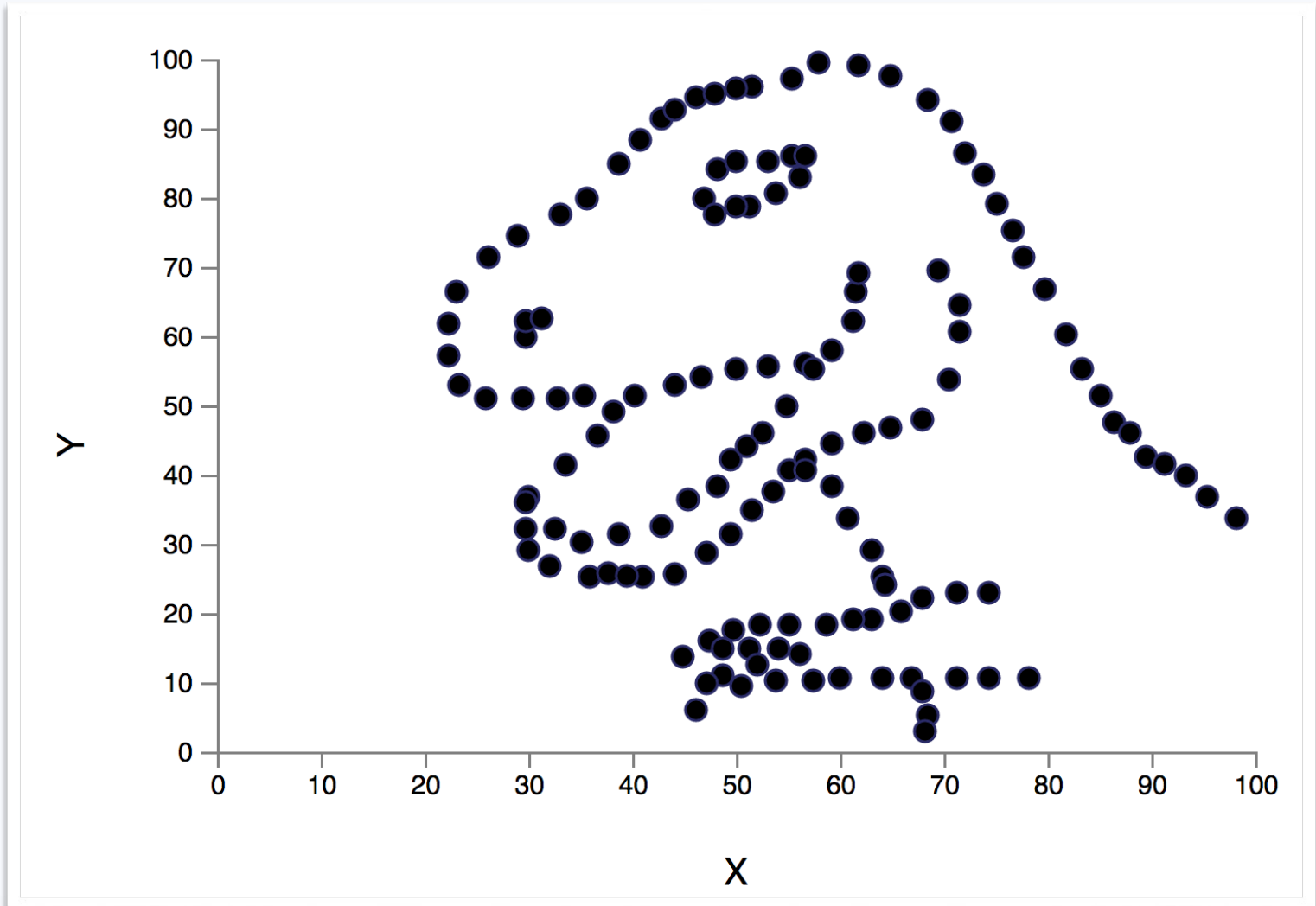
$$\frac{\sigma_V}{V} = \sqrt{4 \left(\frac{\sigma_D}{D}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_L}{L}\right)^2}$$

$$\sigma_V = V \sqrt{4 \left(\frac{\sigma_D}{D}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_L}{L}\right)^2} = 245 \sqrt{4 \left(\frac{0,05}{5,00}\right)^2 + \left(\frac{0,05}{12,50}\right)^2} = 5 \text{ cm}^3$$

Propagação de Erros

- Como fica o caso do volume?
 - Com: $\sigma_V = 5 \text{ cm}^3$
 - Teremos: $V = 245 \text{ cm}^3 \pm 5 \text{ cm}^3$

Gráficos



Gráficos

- O que todo gráfico precisa apresentar?
 - Título ou legenda (o que é este gráfico?)
 - Eixos com nomes das variáveis, escalas e unidades (quais as grandezas e unidades escolhidas para os eixos?)
 - Dados, com incertezas!
 - Função teórica, curvas médias, modelo ajustado (opcional).

Gráficos

- Todo gráfico deve ter um título, pelo qual é referido no texto. Geralmente, o título do gráfico é colocado na parte superior do gráfico, em destaque.
- Caso o gráfico seja inserido dentro de um texto, o mesmo deve ser acompanhado de uma legenda, logo abaixo do gráfico, numerada, que explique de forma sucinta o seu conteúdo.
- No caso da presença de uma legenda, o título do gráfico torna-se OPCIONAL, já que a legenda acaba suprimindo o leitor de informação suficiente para o entendimento do gráfico.
- A legenda deve conter uma descrição sucinta do que é apresentado no gráfico. Note que uma legenda tipo “velocidade vs tempo” é redundante pois esta informação já está contida nos rótulos dos eixos.

Gráficos

- Cada um dos eixos deve conter o nome (ou símbolo) da variável representada, a escala de leitura e a unidade correspondente.
- Escolha uma escala conveniente para a qual o gráfico represente bem o intervalo medido para cada variável.
 - As escalas dos eixos não precisam começar na origem (zero, zero).
 - Elas devem abranger a faixa de variação que você quer representar.
 - É conveniente que os limites da escala correspondam a um número inteiro de divisões principais.

Gráficos

- Indique os valores correspondentes às divisões principais abaixo do eixo x e à esquerda do eixo y usando números grandes.
- As unidades devem ser escolhidas de maneira a minimizar o número de dígitos nos valores que indicam o valor da divisão principal. Uma regra prática é tentar usar no máximo três dígitos nestes valores, fazendo uso de potências de 10 na expressão das unidades para completar a informação.
- Ao traçar os eixos no papel milimetrado, não use a escala marcada no papel pelo fabricante. É você quem define a sua escala, baseando-se nos seus dados. Também não use os eixos nas margens do papel. Desenhe os seus próprios, porque você precisará de espaço para a identificação das variáveis e para a legenda.
- Por fim, abaixo ou à esquerda dos números da escala, conforme o caso, escreva o nome (ou símbolo) da variável correspondente e a unidade para leitura entre parênteses (km, 105 N/cm, etc.).

Gráficos

- Assinale no gráfico a posição dos pontos experimentais: USE MARCAS BEM VISÍVEIS (em geral, círculos cheios).
- NUNCA indique as coordenadas dos pontos graficados no eixo.
- Coloque barras de erros nos pontos, se for o caso. Se os erros são menores que o tamanho dos pontos, indique isso na legenda.
- Às vezes, ajuda a visualização traçar a melhor curva média dos pontos, ignorando alguns pontos que fogem demasiadamente do comportamento médio.
- Em outras palavras, pode-se dizer que a curva média deve ser traçada de maneira a minimizar os deslocamentos da curva em relação aos pontos experimentais ao longo do traçado.
- NUNCA LIGUE OS PONTOS EXPERIMENTAIS.

Gráficos

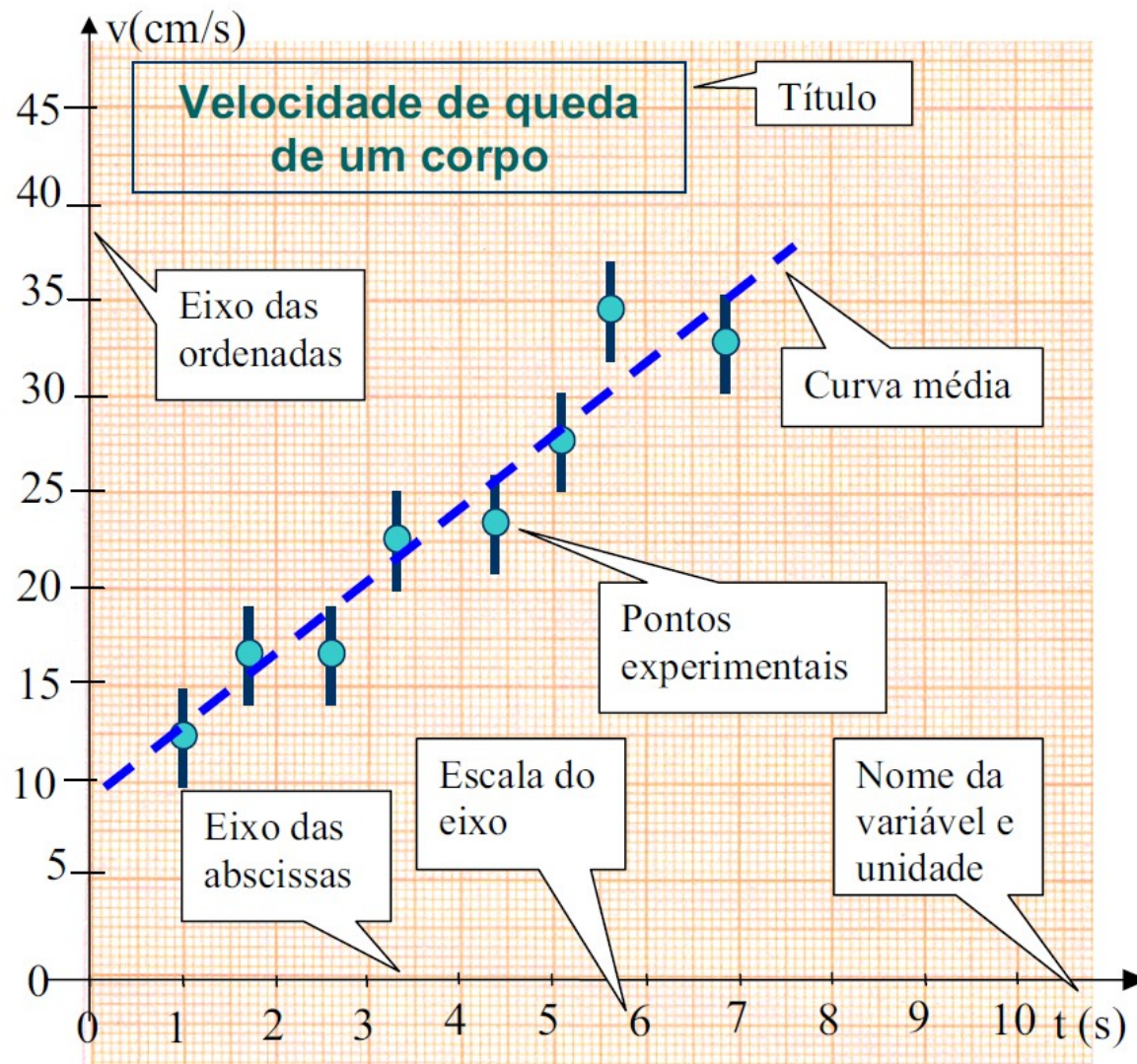
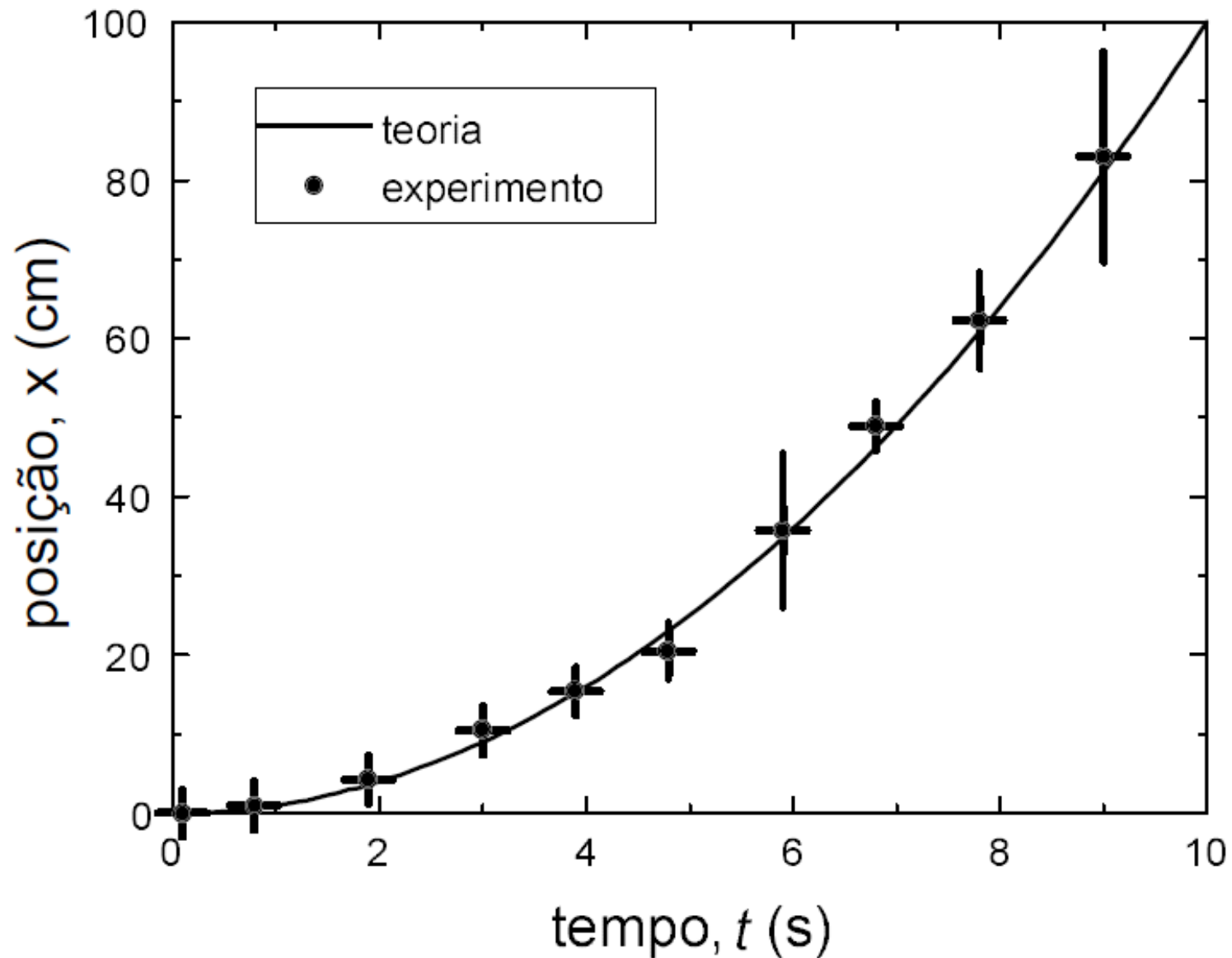


Figura 3.1. Componentes típicos de um gráfico científico padrão.

Gráficos



Gráficos

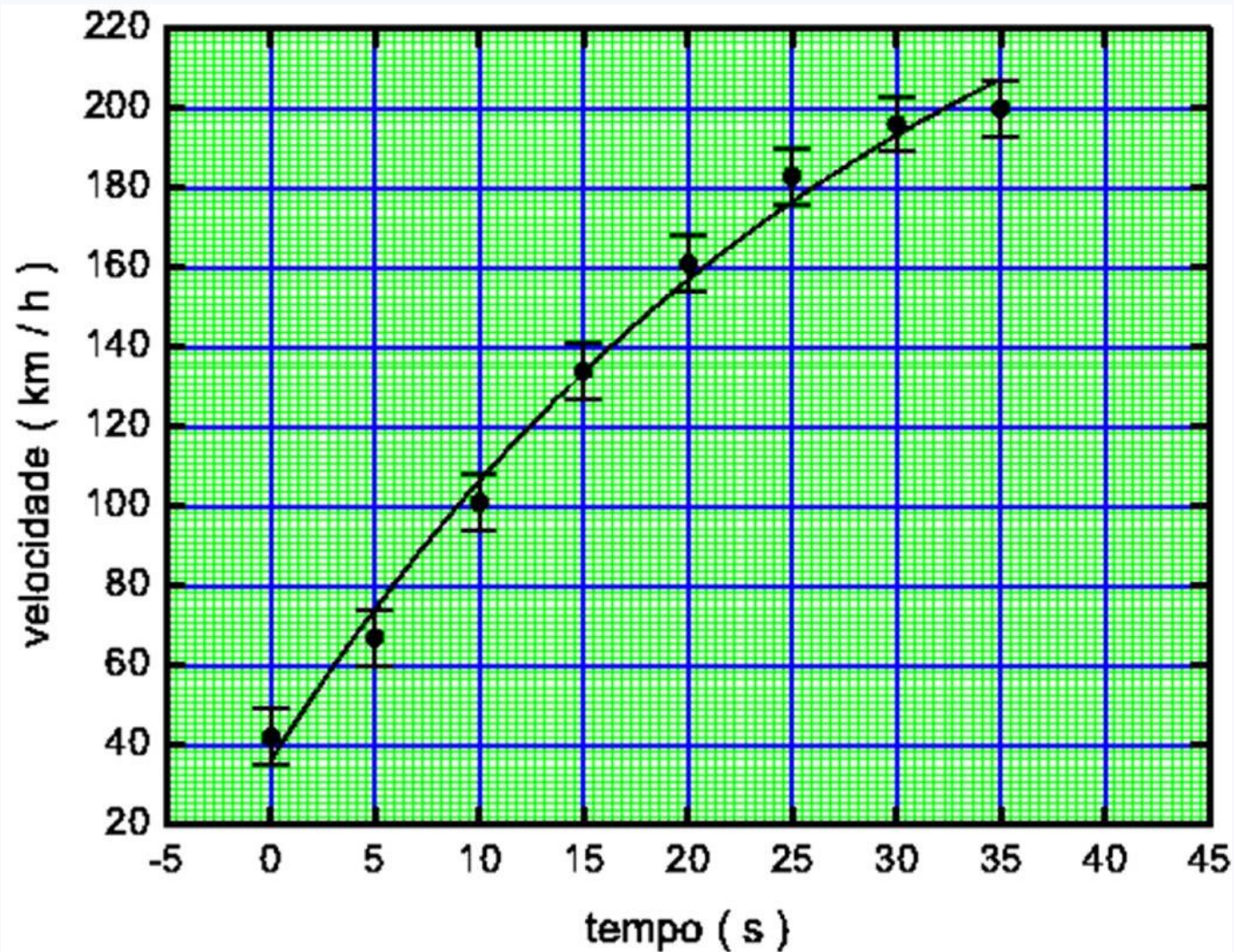
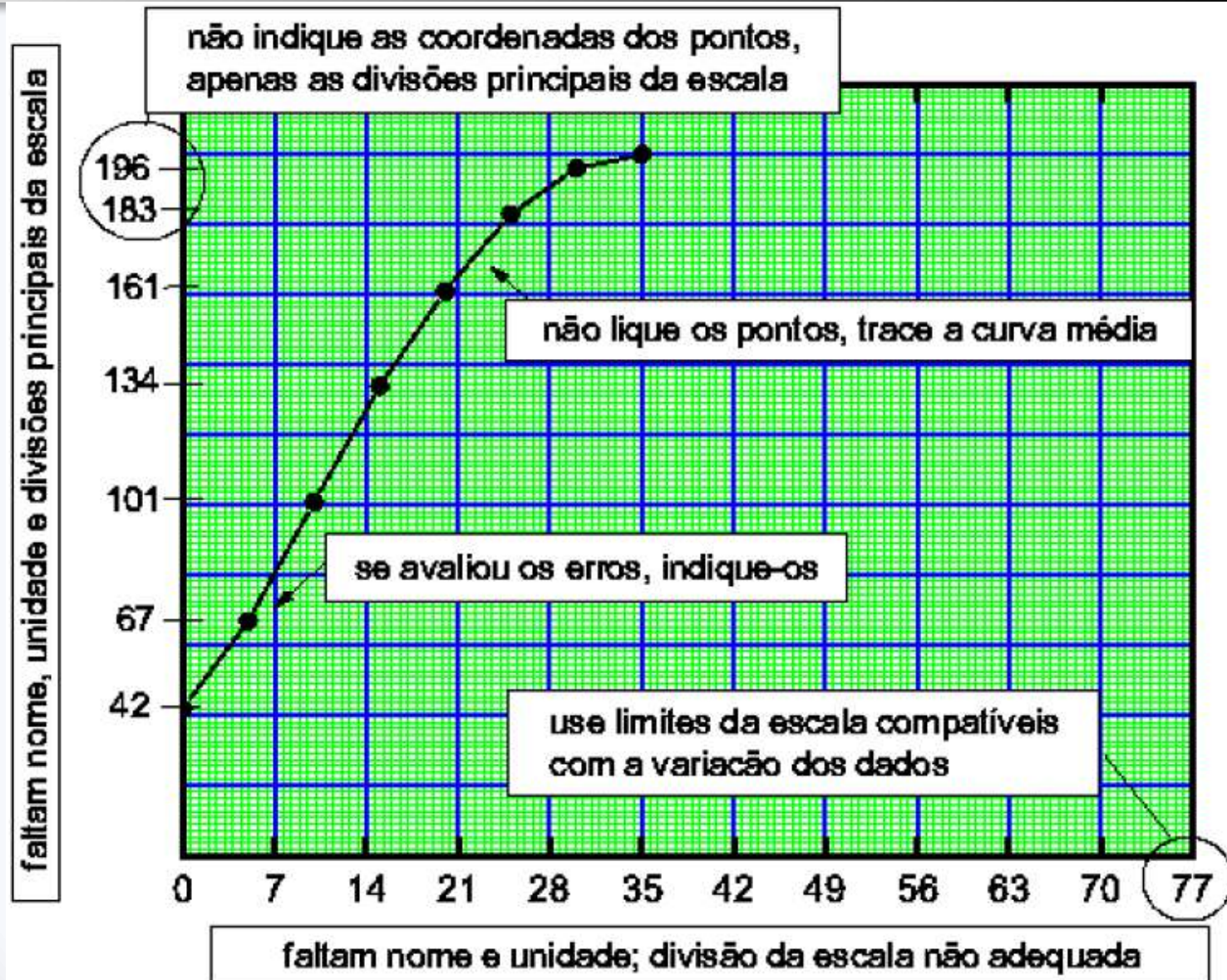


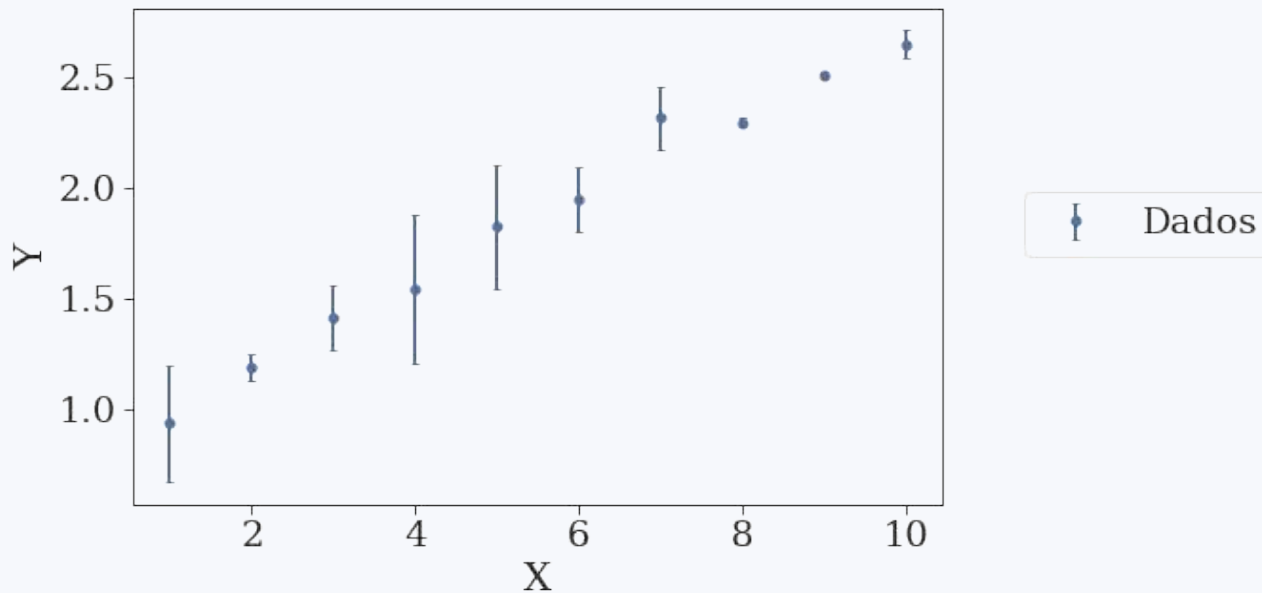
Figura 1: variação da velocidade em função do tempo de um corpo se deslocando em movimento variado

Gráficos



Método de Mínimos Quadrados

- Dado um conjunto de medidas (x,y) e seus erros (y_{erro}) queremos estimar qual modelo teórico descreve bem estes dados.



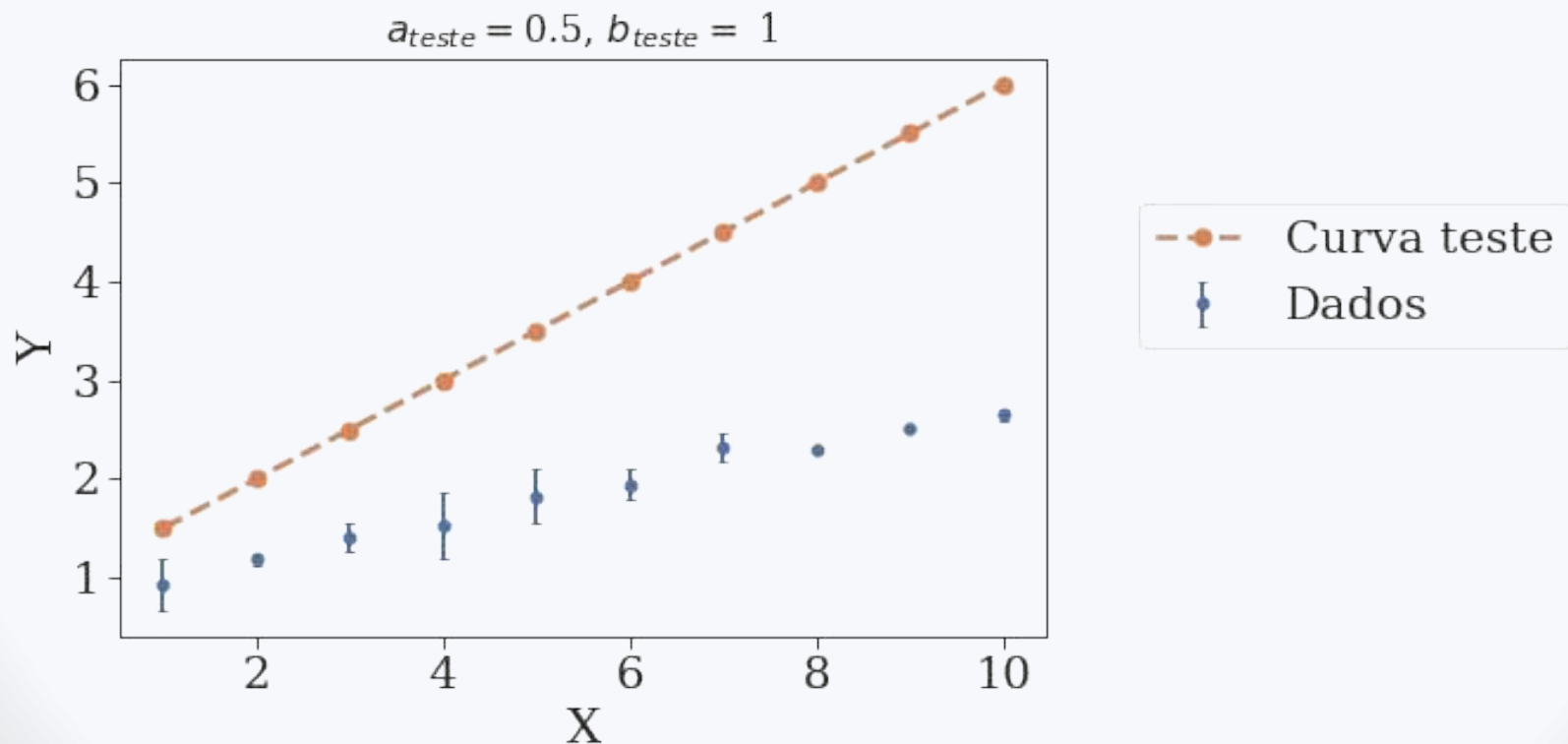
- O caso mais simples corresponde a um modelo linear, onde espera-se que a curva que corretamente descreve os dados é uma reta. Neste caso, o modelo mais geral corresponde a equação da reta:

$$f(x) = ax + b$$

- a = coeficiente angular
- b = coeficiente linear

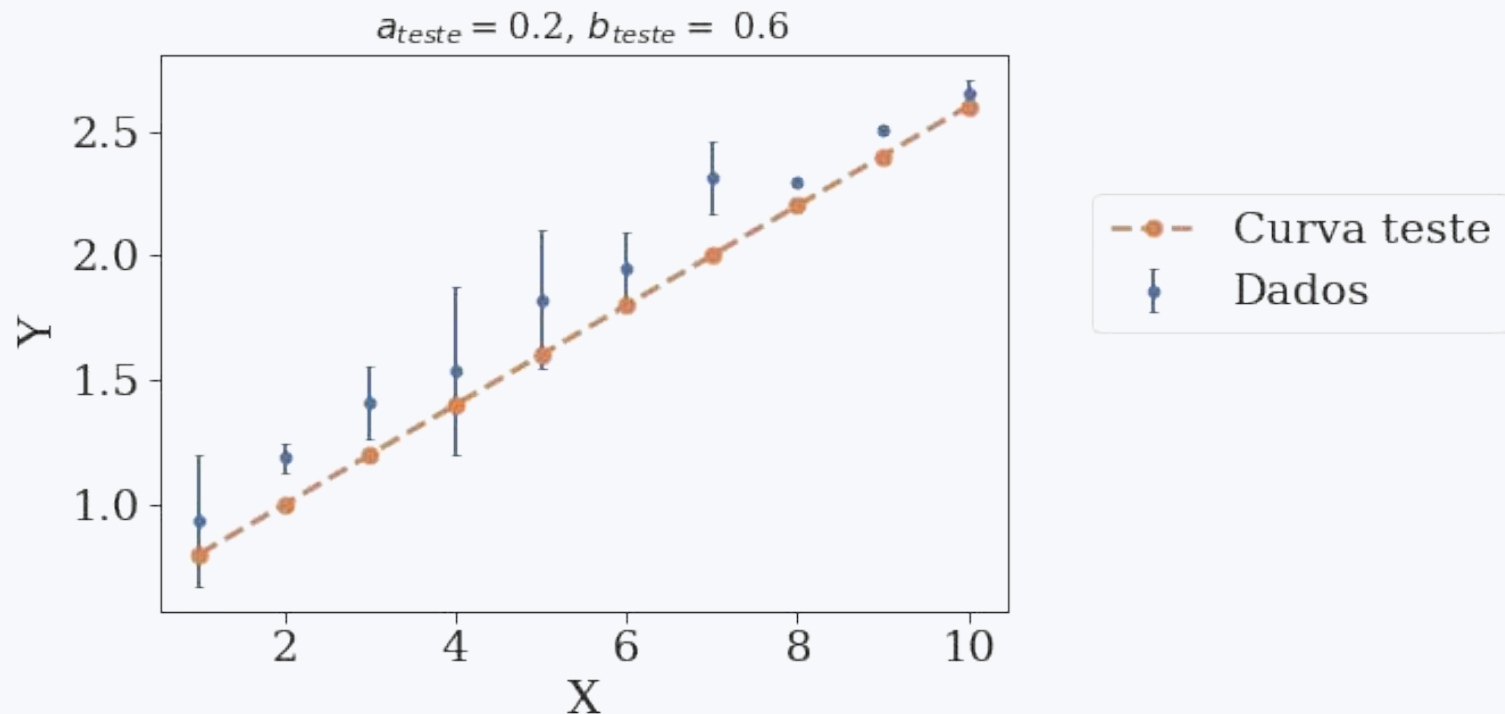
Método de Mínimos Quadrados

- A partir dos dados medidos queremos encontrar o valor dos coeficientes (a e b) que melhor descreve os dados experimentais.
- Se escolhermos $a=0,5$ e $b = 1$ e calcularmos $f(x)$ para os valores de x medidos, obtemos:



Método de Mínimos Quadrados

- Porém se escolhermos $a=0,2$ e $b = 0,6$, obtemos:



- A segunda escolha claramente descreve os dados de maneira mais adequada.
- Como podemos determinar os melhores valores de a e b possíveis de forma quantitativa?

Método de Mínimos Quadrados

- Existem diversos métodos estatísticos que nos permitem determinar os coeficientes a e b e que possuem uma sólida fundamentação teórica.
- Nós adotaremos o método dos “mínimos quadrados”.
- Vamos usar o seguinte parâmetro para estimar a qualidade do nosso ajuste, ou seja, o quão adequada é a nossa escolha para os parâmetros a e b :

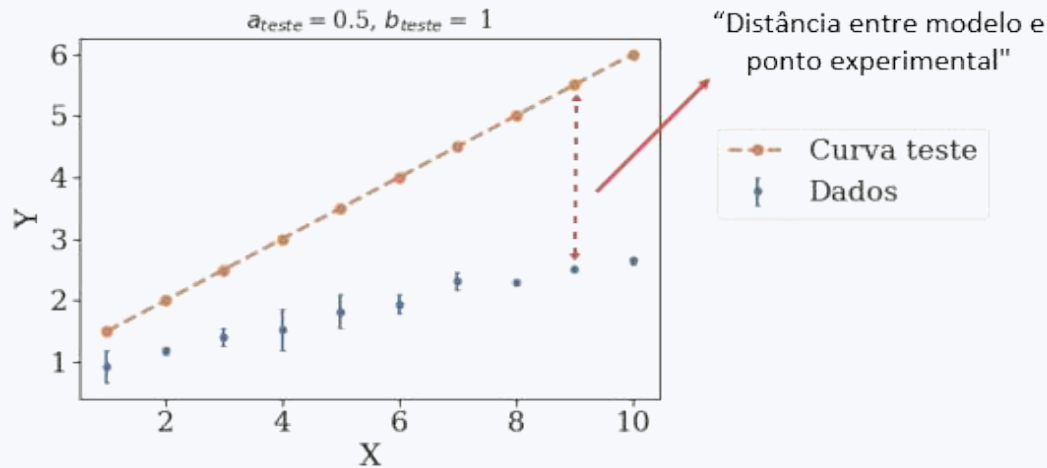
$$\chi^2(a, b) = \sum_{i=1}^N \left[\frac{y_i - (ax_i + b)}{\sigma_i} \right]^2$$

(“chi-quadrado” ou residual)

- N = número de dados
- x_i = valores medidos de X
- y_i = valores medidos de Y
- σ_i = erro experimental de y_i
- a = coeficientes angular
- b = coeficiente linear

Método de Mínimos Quadrados

- Utilizando o exemplo anterior:



$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \left[\frac{y_i - (ax_i + b)}{\sigma_i} \right]^2 = 55.306$$

- Devemos minimizar o χ^2 .

Método de Mínimos Quadrados

- Devemos escolher os valores de a e b que minimizam χ^2 .
- O mínimo de χ^2 pode ser obtido através das derivadas com relação aos coeficientes (parâmetros) a e b. O resultado é:

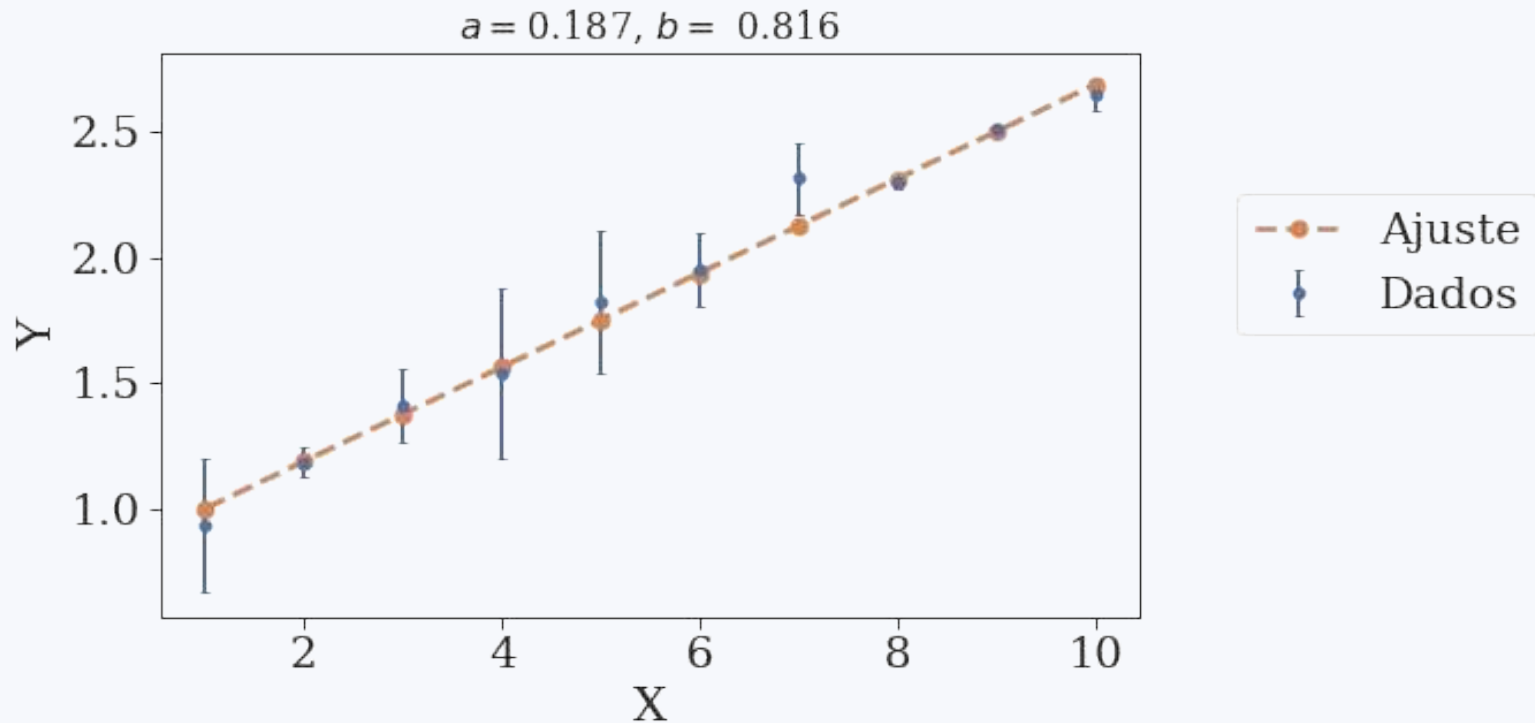
$$a = \frac{\left(\sum \frac{y_i}{\sigma_i^2} \right) \left(\sum \frac{x_i}{\sigma_i^2} \right) - \left(\sum \frac{1}{\sigma_i^2} \right) \left(\sum \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2} \right)}{\left(\sum \frac{x_i}{\sigma_i^2} \right)^2 - \left(\sum \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} \right) \left(\sum \frac{1}{\sigma_i^2} \right)}$$
$$b = \frac{\left(\sum \frac{y_i}{\sigma_i^2} \right) - a \left(\sum \frac{x_i}{\sigma_i^2} \right)}{\left(\sum \frac{1}{\sigma_i^2} \right)}$$

- A soma é sobre todos os dados
- x_i = valores medidos de X
- y_i = valores medidos de Y
- σ_i = erro experimental de y_i
- a e b = coeficientes angular e

Método de Mínimos Quadrados

- Aplicando estas fórmulas para o exemplo anterior obtemos:

$$a = 0,187, b = 0,82 \quad (\chi^2 = 3)$$



Método de Mínimos Quadrados

- Finalmente também é possível estimar a incerteza nos coeficientes a e b , ou seja, o quanto podemos variar a e b e ainda obter um bom ajuste para os dados.

$$\Delta a = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{\langle \sigma^2 \rangle}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}}$$

$$\Delta b = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{\langle \sigma^2 \rangle \langle x^2 \rangle}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}}$$

$$\langle x \rangle = \left(\sum_i \frac{x_i}{\sigma_i^2} \right) / \left(\sum_i \frac{1}{\sigma_i^2} \right)$$

$$\langle x^2 \rangle = \left(\sum_i \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} \right) / \left(\sum_i \frac{1}{\sigma_i^2} \right)$$

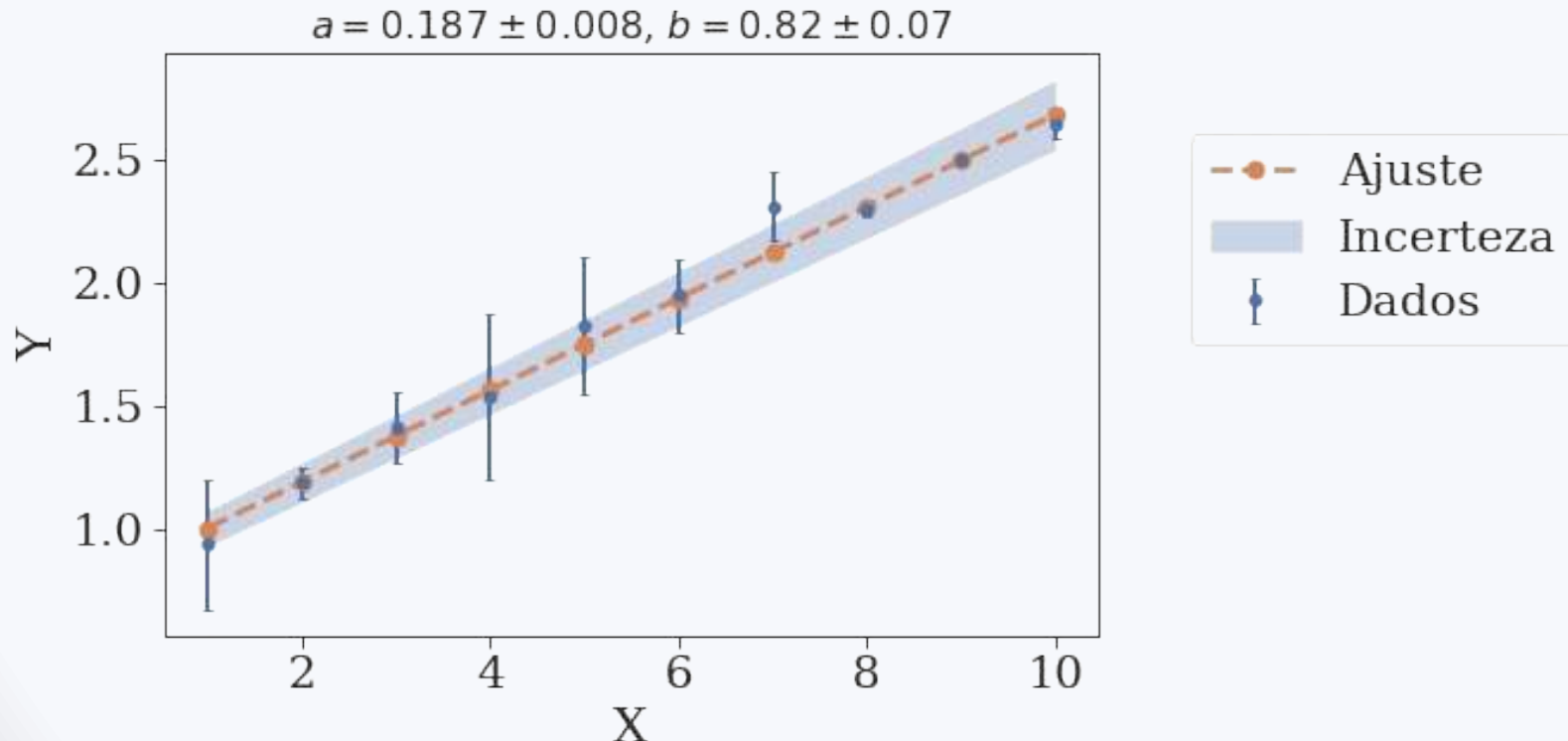
$$\langle \sigma^2 \rangle = \frac{N}{\sum_i 1/\sigma_i^2}$$

- A soma é sobre todos os dados
- x_i = valores medidos de X
- y_i = valores medidos de Y
- σ_i = erro experimental de y_i

Método de Mínimos Quadrados

- Aplicando este método para o exemplo anterior obtemos:

$$\Delta a = 0,008, \Delta b = 0,07$$



Obrigado pela atenção!