

Laboratório Medidas e Cinemática

James Moraes de Almeida



MINISTÉRIO DA
EDUCAÇÃO

MINISTÉRIO DA
CIÊNCIA, TECNOLOGIA
E INOVAÇÃO



Unidades e Medições

PARTE 1: O QUE SIGNIFICA MEDIR?

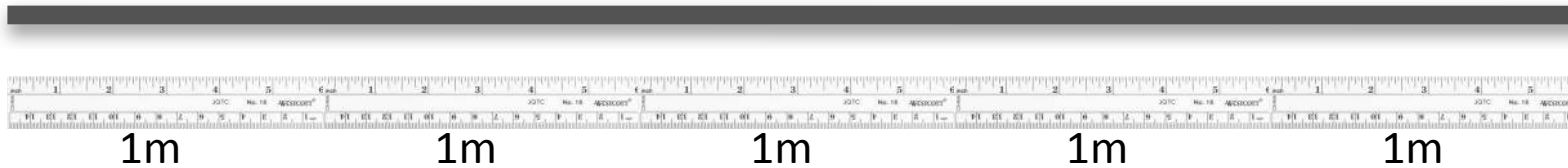


Unidades e Medições

- A maioria das grandezas de interesse não é bem especificada por um número apenas!
 - Por exemplo: não faz sentido dizer que um fio mede 5.
 - Faz sentido dizer que um fio mede 5m, ou 5 jardas. Mas o que isso significa?
-

Unidades e Medições

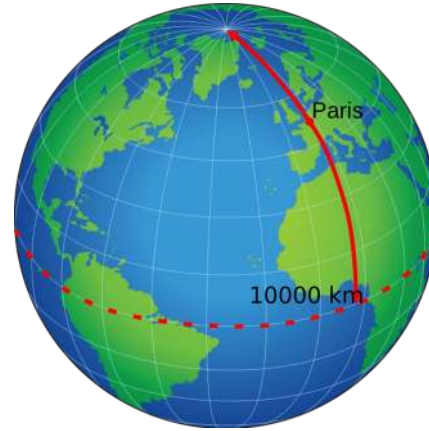
- Dizer que o fio vale 5m significa que este fio é cinco vezes mais longo do que um comprimento padronizado, que chamamos de “1 metro”.



- MEDIR um comprimento significa comparar uma propriedade (a dimensão linear, o tamanho) com a de outro objeto, considerado como um padrão (ou unidade).
 - Quando isso acontece, dizemos que essa grandeza é dimensional. No caso, falamos de dimensão de comprimento.
- Mas qual é o tamanho de uma régua de 1m?
 - ISSO É UMA CONVENÇÃO.

Unidades e Medições

- O metro foi originalmente definido, em 1795, como $1/10.000.000$ da distância entre o polo norte e o equador, medido no meridiano que passa por Paris.



- Entre 1799 e 1960, barras metálicas (de platina, e posteriormente irídio-platina) foram utilizadas como padrão para o metro.



Unidades e Medições

- Em 1960, passou-se a utilizar o comprimento de onda de uma transição atômica do Kriptônio como referência para o metro.
- Esse tipo de definição tem a vantagem de não depender de um objeto físico particular, que pode, por exemplo, ser destruído por uma catástrofe! Mais que isso, ela proporciona maior estabilidade e precisão para a definição do metro.
- Em 1983, adotou-se o padrão atual: o metro é definido como a distância percorrida pela luz no vácuo durante um intervalo de tempo de $1/299.792.458$ segundos.

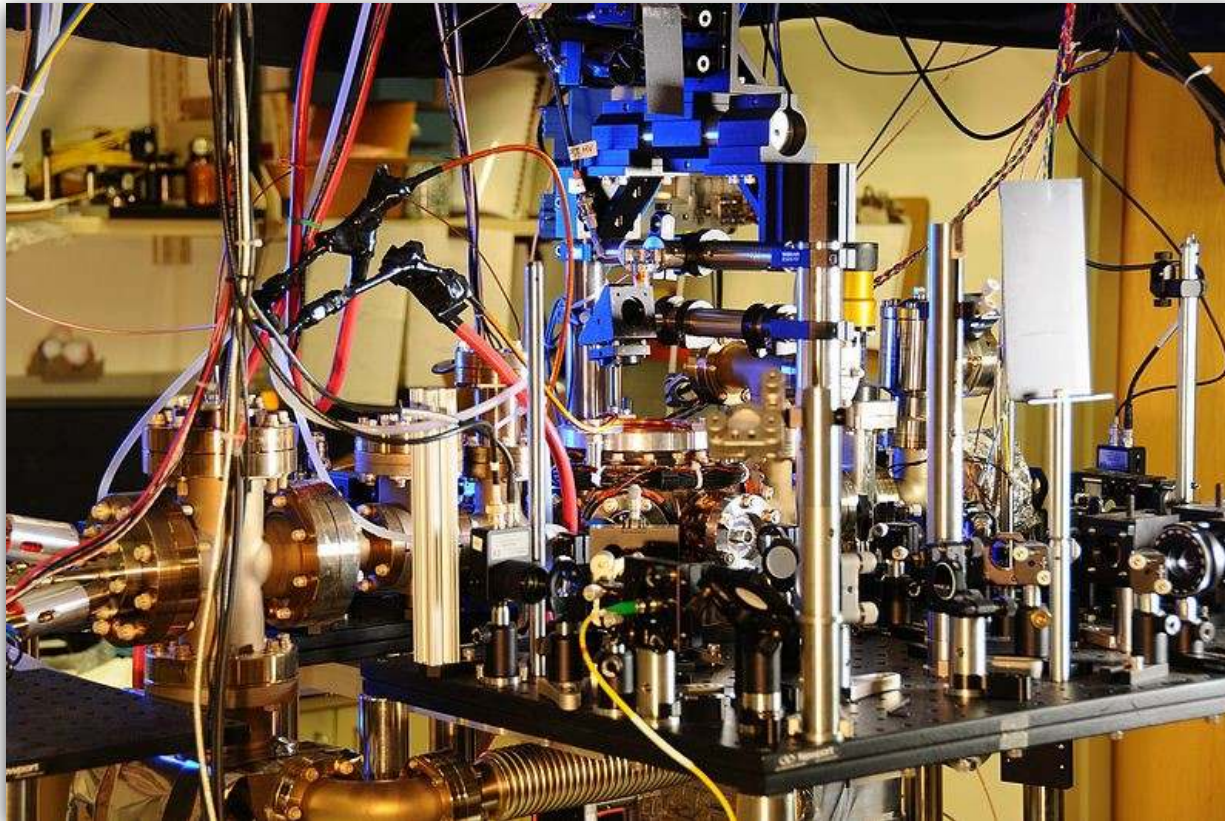
Unidades e Medições

- Outra grandeza fundamental que queremos medir é o TEMPO.
- Na prática, a passagem do tempo é medida através de algum sistema periódico (um relógio).
- Exemplos primitivos: um pêndulo, a pulsação cardíaca, o ciclo dia-e-noite.

Unidades e Medições

- O segundo foi inicialmente definido como $1/86.400$ de um dia solar. Contudo, a velocidade de rotação da Terra varia lentamente, então esta não é uma definição estável.
- Atualmente, o segundo é definido a partir das propriedades atômicas do átomo de Césio-133. Esta definição é conveniente pois sabemos que os átomos de Césio se comportam da mesma forma, independente da rotação da Terra ou de outros fatores.

Unidades e Medições



Relógio atômico baseado em Itérbio (Yb), nos EUA: este relógio é tão preciso que espera-se um atraso de cerca de 1s ao longo de toda a idade do universo (+ de 10 bilhões de anos!).

Unidades e Medições

- Outra grandeza fundamental é a MASSA.
- A massa está ligada à inércia de um corpo. A definição precisa do que é massa será vista no curso de Fenômenos Mecânicos.
 - Nunca é demais lembrar: **MASSA** não é o mesmo que **PESO**.
- Até 2019, o padrão internacional de massa era um cilindro de liga platina-irídio, guardada num centro de metrologia em Sèvres, na França.



Unidades e Medições

- Em 20 de maio de 2019, o padrão internacional do quilograma foi alterado.
 - A definição atual do quilograma é baseada no valor de uma constante universal da física, a constante de Planck, que pode ser medida com muita precisão.
 - Um quilograma é definido como: a massa tal que a constante de Planck vale exatamente $h = 6.62607015 \times 10^{-34} \text{ kg m}^2/\text{s}$.
- Pode não parecer uma definição muito prática, mas assim como as definições correntes para o metro e o segundo, ela pode ser aferida com muita precisão através de experimentos adequados, e independe da existência e estabilidade de um sistema físico específico.

Unidades e Medições

- Comprimento, tempo e massa são dimensões básicas.
- Outras grandezas, também dimensionais, podem ser consideradas derivadas, por exemplo:
 - velocidade é definida como uma razão entre comprimento e tempo
 - aceleração é definida como uma razão entre velocidade e tempo
 - força é definida como um produto entre massa e aceleração

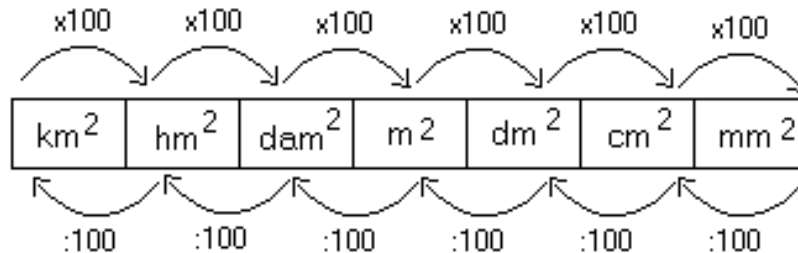
Unidades e Medições

- Em 1975, um acordo internacional instituiu o SI – Sistema Internacional de Unidades, que define grandezas e unidades básicas. Todas as demais grandezas usadas na ciência são derivadas destas grandezas básicas.

Grandeza	Unidade	Símbolo
Comprimento	metro	m
Massa	quilograma	kg
Tempo	segundo	s
Corrente elétrica	ampère	A
Temperatura termodinâmica	kelvin	K
Quantidade de matéria	mol	mol ^[8]
Intensidade luminosa	candela	cd

Unidades e Medições

PARTE 2: ANÁLISE DIMENSIONAL, TRANSFORMAÇÃO DE UNIDADES



1km = 1000m	1dia = 24h	1N.m = 1J
1m = 100cm	1h = 60min	1cal ≈ 4,2J
1cm = 10mm	1min = 60s	1kWh = 3,6x10⁶J
pol (in) = 2,54cm	1h = 3600s	
pé (ft) = 30,48cm		1m³ = 10³l
milha (mi) = 1609m	1ton = 10³kg	1ml = 1cm³
jarda (Yd) ≈ 0,91m	1kg = 10³g	1000ml = 1l
	onça (oz) = 28,7g	galão (gal) = 4,55 l
1kg/m³ = 10³g/m³	libra (lb) = 454g	
1kg/l = 10³ kg/m³		1A = 1C/s
1 g/cm³ = 10³ kg/m³	1m/s = 3,6km/h	1V = 1J/C
	1mph ≈ 1,6 km/h	
1J/s = 1W		1Pa = 1N/m²
1cv ≈ 735W	1Kgf = 9,8N	1atm = 760mmHg
1HP 746W		1atm ≈ 10⁵N/m²
		1N/m² ≈ 10⁻⁵kgf/cm²

Unidades e Medições

- Análise Dimensional: todos os termos de uma fórmula devem ter a mesma dimensão.

- Digamos que num dado problema, você chegou à seguinte solução:

$$v_f^2 = v_0^2 + 2(\Delta x)^2$$

- Isso está correto? Vejamos as unidades:

$$v_f^2 \rightarrow \frac{\text{Comprimento}^2}{\text{Tempo}^2}$$

$$v_0^2 \rightarrow \frac{\text{Comprimento}^2}{\text{Tempo}^2}$$

$$2(\Delta x)^2 \rightarrow \text{Comprimento}^2$$

Unidades e Medições

- Análise Dimensional: todos os termos de uma fórmula devem ter a mesma dimensão.

- Digamos que num dado problema, você chegou à seguinte solução:

$$v_f^2 = v_0^2 + 2(\Delta x)^2$$

- Isso está correto? Vejamos as unidades:

$$v_f^2 \rightarrow \frac{\text{Comprimento}^2}{\text{Tempo}^2}$$

$$v_0^2 \rightarrow \frac{\text{Comprimento}^2}{\text{Tempo}^2}$$

$$2(\Delta x)^2 \rightarrow \text{Comprimento}^2$$

$$v_f^2 = v_0^2 + 2(\Delta x)^2$$

Unidades e Medições

- Análise Dimensional: todos os termos de uma fórmula devem ter a mesma dimensão.

- Digamos que num dado problema, você chegou à seguinte solução:

$$v_f^2 = v_0^2 + 2(\Delta x)^2$$

- Isso está correto? Vejamos as unidades:

$$v_f^2 \rightarrow \frac{\text{Comprimento}^2}{\text{Tempo}^2}$$

$$v_0^2 \rightarrow \frac{\text{Comprimento}^2}{\text{Tempo}^2}$$

$$2(\Delta x)^2 \rightarrow \text{Comprimento}^2$$

$$\left. \begin{array}{l} v_f^2 \rightarrow \frac{\text{Comprimento}^2}{\text{Tempo}^2} \\ v_0^2 \rightarrow \frac{\text{Comprimento}^2}{\text{Tempo}^2} \\ 2(\Delta x)^2 \rightarrow \text{Comprimento}^2 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} v_f^2 = v_0^2 + 2(\Delta x)^2 \\ \frac{\text{Comprimento}^2}{\text{Tempo}^2} = \frac{\text{Comprimento}^2}{\text{Tempo}^2} + \text{Comprimento}^2 \end{array}$$

Unidades e Medições

- Análise Dimensional: todos os termos de uma fórmula devem ter a mesma dimensão.

- Digamos que num dado problema, você chegou à seguinte solução:

$$v_f^2 = v_0^2 + 2(\Delta x)^2$$

- Isso está correto? Vejamos as unidades:

$$v_f^2 \rightarrow \frac{\text{Comprimento}^2}{\text{Tempo}^2}$$

$$v_0^2 \rightarrow \frac{\text{Comprimento}^2}{\text{Tempo}^2}$$

$$2(\Delta x)^2 \rightarrow \text{Comprimento}^2$$

$$\left. \begin{array}{l} v_f^2 \rightarrow \frac{\text{Comprimento}^2}{\text{Tempo}^2} \\ v_0^2 \rightarrow \frac{\text{Comprimento}^2}{\text{Tempo}^2} \\ 2(\Delta x)^2 \rightarrow \text{Comprimento}^2 \end{array} \right\} \quad \frac{\text{Comprimento}^2}{\text{Tempo}^2} = \frac{\text{Comprimento}^2}{\text{Tempo}^2} + \text{Comprimento}^2$$

Algo está errado!

Unidades e Medições

- Qual é o problema?

$$\frac{\text{Comprimento}^2}{\text{Tempo}^2} = \frac{\text{Comprimento}^2}{\text{Tempo}^2} + \text{Comprimento}^2$$

- O termo da direita está com a dimensão errada, deveria ser igual aos outros termos. A expressão correta seria:

$$v_f^2 = v_0^2 + 2a\Delta x$$

$$\frac{\text{Comprimento}^2}{\text{Tempo}^2} = \frac{\text{Comprimento}^2}{\text{Tempo}^2} + \frac{\text{Comprimento}}{\text{Tempo}^2} \times \text{Comprimento}$$

$$\frac{\text{Comprimento}^2}{\text{Tempo}^2} = \frac{\text{Comprimento}^2}{\text{Tempo}^2} + \frac{\text{Comprimento}^2}{\text{Tempo}^2}$$

- Todos na mesma dimensão!

Unidades e Medições

- Conversão de Unidades: podemos converter livremente uma grandeza de uma unidade para outra, desde que mantendo sempre a consistência dimensional.
 - Por exemplo: uma régua de 1 jarda tem o mesmo tamanho que uma régua de 0,9144 metros.

$$1 \text{ jarda} = 0,9144 \text{ metros}$$

- Podemos escrever:

$$\frac{1 \text{ jarda}}{0,9144 \text{ metros}} = 1$$

$$\frac{0,9144 \text{ metros}}{1 \text{ jarda}} = 1$$

Unidades e Medições

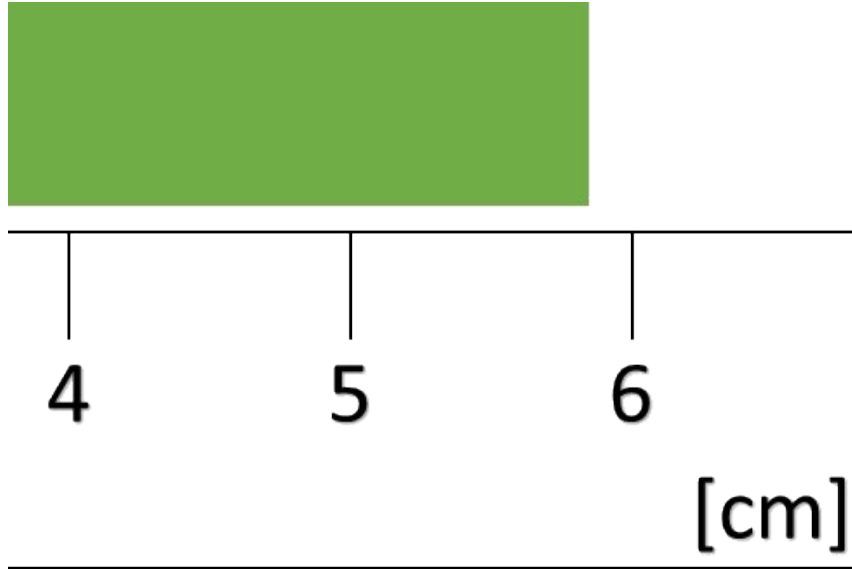
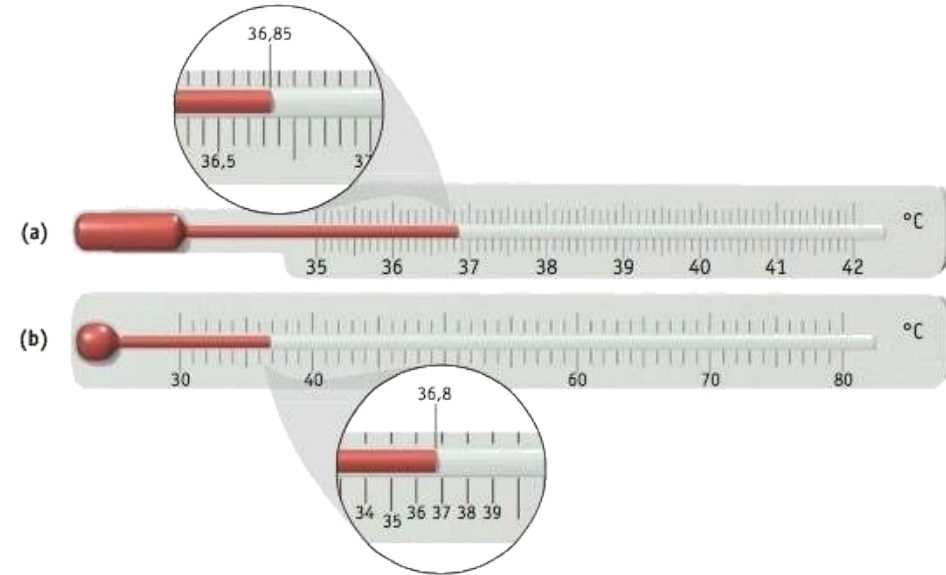
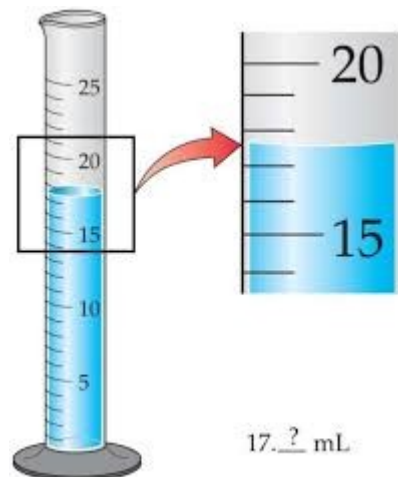
- Então, sendo: $\frac{0,9144 \text{ metros}}{1 \text{ jarda}} = 1$

$$15 \text{ jardas} = 15 \text{ jardas} \times \frac{0,9144 \text{ m}}{1 \text{ jarda}} = 15 \times 0,9144 \text{ m} = 13,71 \text{ m}$$

- E utilizando: $\frac{1 \text{ jarda}}{0,9144 \text{ metros}} = 1$

$$20 \text{ m} = 20 \text{ m} \times \frac{1 \text{ jarda}}{0,9144 \text{ m}} = \frac{20}{0,9144} \text{ jardas} = 21,87 \text{ jardas}$$

Algarismos Significativos



Copyright © 2007 Pearson Prentice Hall, Inc.

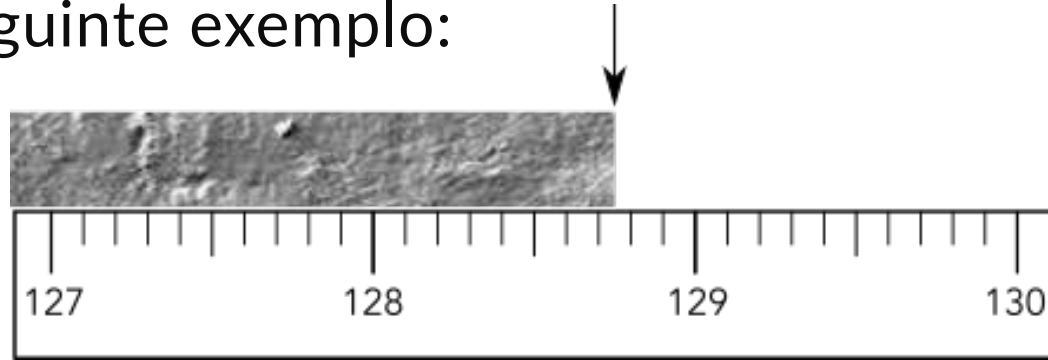


Algarismos Significativos

- O resultado de uma medida deve conter as seguintes informações:
 - O valor da grandeza.
 - A incerteza da medição.
 - A unidade (caso pertinente).
- Vamos ver agora como podemos estimar a incerteza de uma das medidas mais simples que podemos fazer: medir o comprimento de um objeto usando uma régua.

Algarismos Significativos

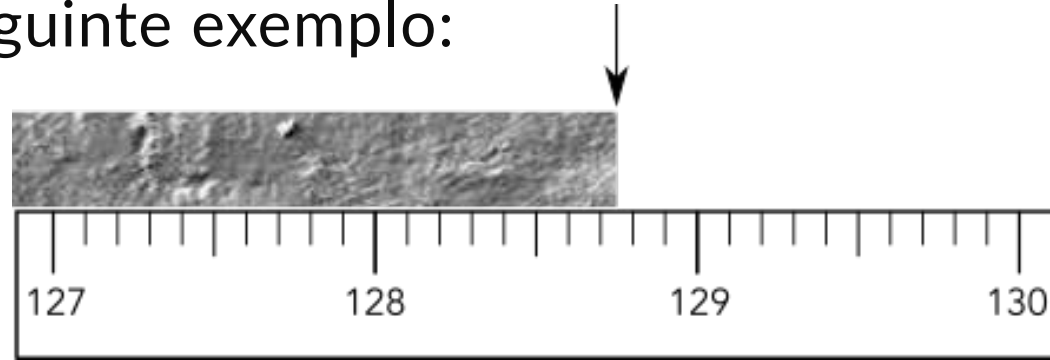
- Veja o seguinte exemplo:



- A leitura da régua está certamente entre 128,7cm e 128,8cm.

Algarismos Significativos

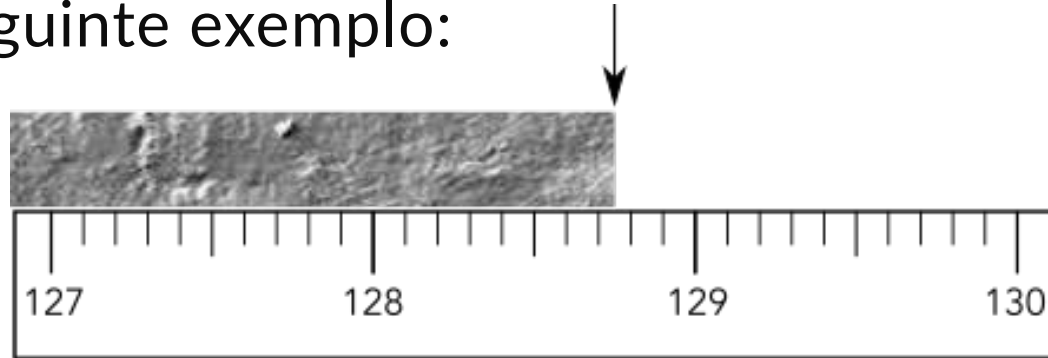
- Veja o seguinte exemplo:



- A leitura da régua está certamente entre 128,7cm e 128,8cm.
 - Valor medido: $x_{\text{medio}} \pm \delta x$

Algarismos Significativos

- Veja o seguinte exemplo:



- A leitura da régua está certamente entre 128,7cm e 128,8cm.

- Valor medido: $x_{\text{medio}} \pm \delta x$

- Qual a incerteza?

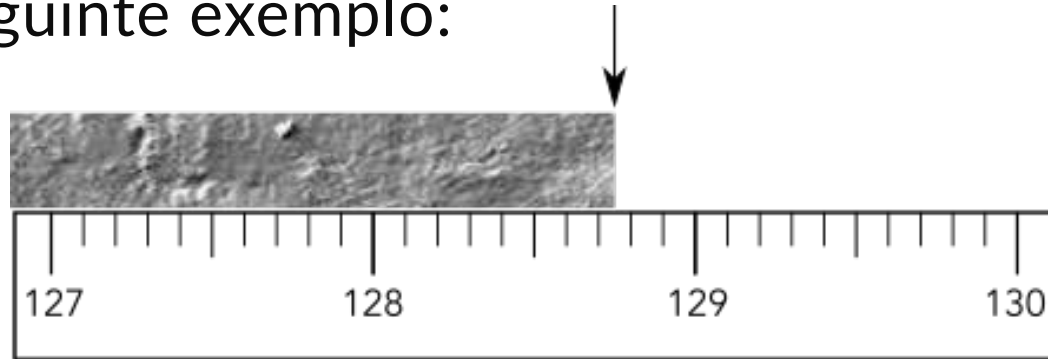
δx = metade da menor graduação do instrumento

- 0,1cm em total: 0,05cm para mais e para menos.

$$L = 128,75 \pm 0,05 \text{ cm}$$

Algarismos Significativos

- Veja o seguinte exemplo:



- A leitura da régua está certamente entre 128,7cm e 128,8cm.
 - Valor medido: $x_{\text{medio}} \pm \delta x$
 - Qual a incerteza?
 - δx = metade da menor graduação do instrumento
 - 0,1cm em total: 0,05cm para mais e para menos.
 - O mesmo vale para: medida de ângulos usando um transferidor, temperatura usando um termômetro de mercúrio, etc...

$$L = 128,75 \pm 0,05 \text{ cm}$$

Algarismos Significativos

- Em casos mais complicados, tanto a medida quanto a incerteza podem resultar em números “quebrados”, aí temos que arredondar de uma forma consistente.

- Note que não faz sentido escrever, por exemplo:

$$g = 9,82435 \pm 0,03 \text{ m/s}^2$$

- Por outro lado, δx será sempre uma estimativa da incerteza, também não fará sentido expressá-lo com muita precisão. Por exemplo:

$$g = 9,82 \pm 0,034594 \text{ m/s}^2$$

- O arredondamento tanto da incerteza quanto da medida deve ser consistente:

$$g = 9,82 \pm 0,03 \text{ m/s}^2$$

Algarismos Significativos

- Algarismos significativos:
 - São os algarismos sobre os quais temos algum conhecimento de uma dada grandeza, excluindo eventuais zeros à esquerda, usados para acertos de unidades, e potências de dez.
 - Atenção: zeros à direita contam como algarismos significativos!
 - Quem vai determinar o número de algarismos significativos da grandeza medida será a sua incerteza estimada.

MEDIDA (mm)	Algarismos Significativos
57,896	5
$5,79 \times 10^4$	3
$5,789600 \times 10^4$	7
$0,007 \times 10^4$	1

Algarismos Significativos

- Regras práticas para apresentação de resultados:
 - Durante os cálculos intermediários, tanto da grandeza de interesse quando da sua incerteza, utilize todos (ou pelo menos um número apreciável) dos algarismos que a calculadora apresenta.
 - Os arredondamentos serão sempre a última etapa.

Algarismos Significativos

- Regras de arredondamento:
 - Sempre arredonde a incerteza para um algarismo significativo:
 - $5,30 \pm 0,0572 \rightarrow 5,30 \pm 0,06$
 - Arredonde então o valor da grandeza, para que o último algarismo significativo do valor medido seja da mesma ordem de grandeza (mesma casa decimal) que a incerteza.
 - $5,301763245986 \pm 0,06 \rightarrow 5,30 \pm 0,06$
 - $1423,923654 \pm 0,18724 \rightarrow 1423,923654 \pm 0,2 \rightarrow 1423,9 \pm 0,2$
 - $987649625,81 \pm 0,1 \rightarrow 987649625,8 \pm 0,1 \rightarrow 9,876496258 \times 10^8 \pm 1 \times 10^{-1}$

Algarismos Significativos

- Alguns instrumentos já tem seu erro definido:



- Caso o erro não seja fornecido utilize a regra:
 - Erro = metade da menor graduação do instrumento.

Algarismos Significativos

- Quando efetuamos várias medidas de uma mesma grandeza, devemos fazer uma análise estatística. Uma vantagem é que erros aleatórios tendem a se cancelar quando fazemos médias de varias observações.
 - Exemplo: Tempo de queda livre de uma bolinha de tênis, lançada a uma altura de $h = 2,00 \pm 0,05$ m, medido com o cronômetro de um telefone celular.

Medida	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t (s)	0,63	0,61	0,67	0,66	0,61	0,68	0,59	0,63	0,58	0,61

Algarismos Significativos

- Como analisar os dados?

Medida	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t (s)	0,63	0,61	0,67	0,66	0,61	0,68	0,59	0,63	0,58	0,61

- Valor médio: $\bar{t} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N t_i$

- Desvio padrão da média: $\sigma_{\bar{t}} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (t_i - \bar{t})^2}$

- Estimativa para o valor e a incerteza da medida: $\bar{t} \pm \sigma_{\bar{t}}$

Algarismos Significativos

- Como analisar os dados?

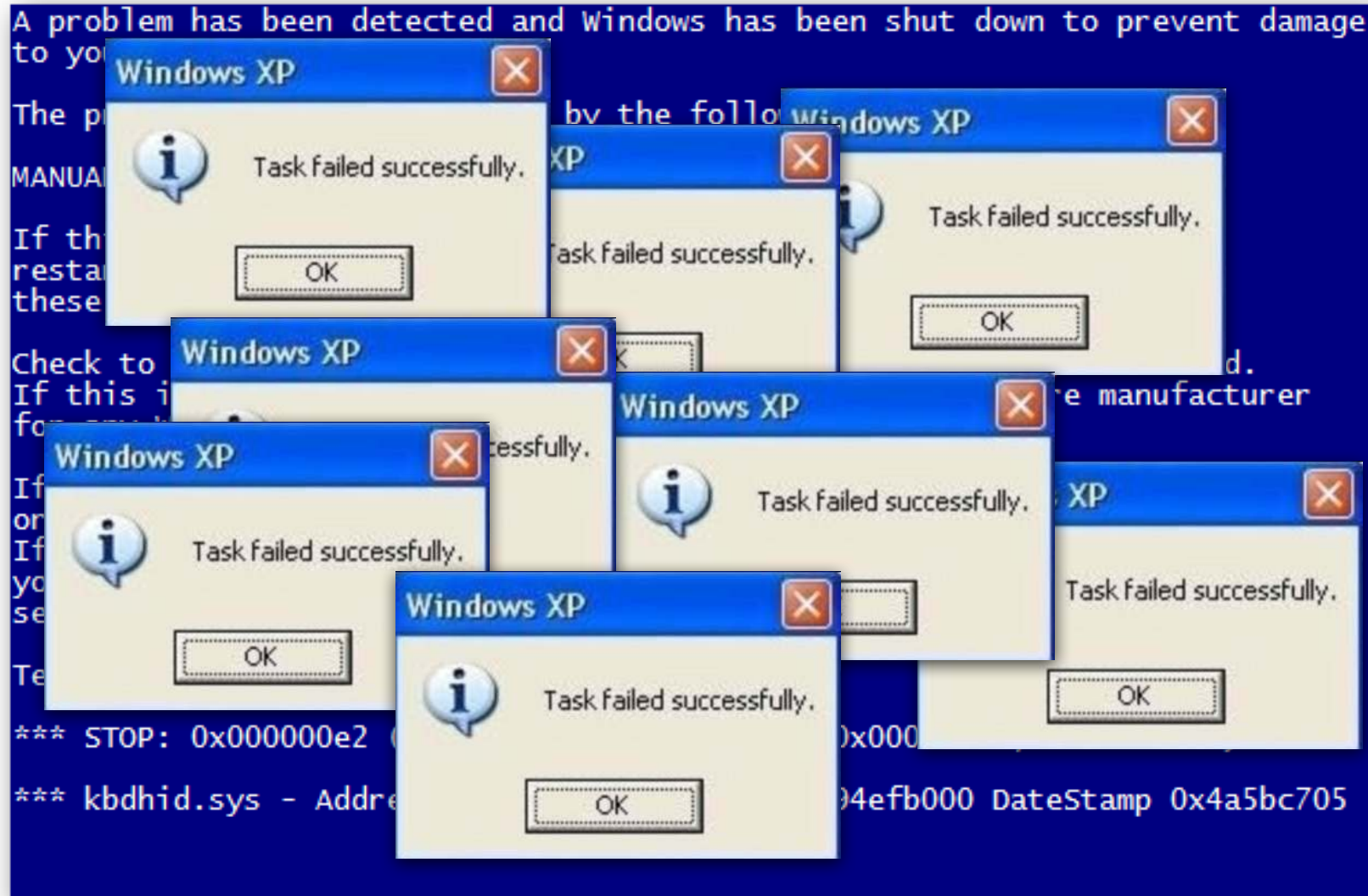
Medida	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t (s)	0,63	0,61	0,67	0,66	0,61	0,68	0,59	0,63	0,58	0,61

- Valor médio: $\bar{t} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N t_i = 0,627 \text{ s}$

- Desvio padrão da média: $\sigma_{\bar{t}} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (t_i - \bar{t})^2} = 0,010651 \text{ s}$

- Estimativa para o valor e a incerteza da medida: $\bar{t} \pm \sigma_{\bar{t}} = 0,63 \pm 0,01 \text{ s}$

Propagação de Erros



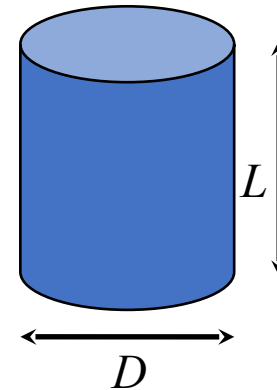
Propagação de Erros

- Você mede o diâmetro e a altura de um cilindro, usando uma régua, fita métrica etc...
- Essas medidas estão associadas a uma incerteza, devida às limitações do instrumento de medida.

$$D = \bar{D} \pm \sigma_D, \quad L = \bar{L} \pm \sigma_L$$

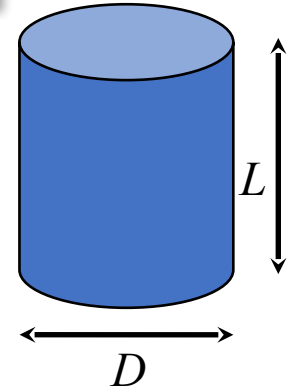
- A partir de D e L, podemos calcular o volume do cilindro através de uma fórmula:

$$V = \pi \frac{D^2}{4} L$$



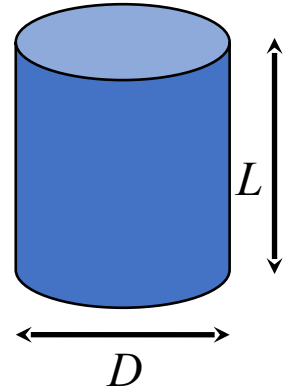
Propagação de Erros

- O valor de V terá uma incerteza, qual?
 $V = \pi \frac{D^2}{4} L$
 - Sendo: $D = 5,00 \pm 0,05 \text{ cm}$
 $L = 12,50 \pm 0,05 \text{ cm}$
 - Valor médio:
$$V = \pi \frac{D^2}{4} L = \pi \frac{(5,00)^2}{4} (12,50) \text{ cm}^3 \approx 245,437 \text{ cm}^3$$
 - Como calcular a incerteza de V ?
 - Uma maneira simples: calcular o valor máximo e mínimo possível para V .
$$V_{max} = \pi \frac{(5,05)^2}{4} (12,55) \text{ cm}^3 \approx 251,372 \text{ cm}^3$$
$$V_{min} = \pi \frac{(4,95)^2}{4} (12,45) \text{ cm}^3 \approx 239,591 \text{ cm}^3$$
$$\delta V = \frac{V_{max} - V_{min}}{2} \approx 5,89058 \text{ cm}^3 \approx 6 \text{ cm}^3$$



Propagação de Erros

- O valor de V terá uma incerteza, qual? $V = \pi \frac{D^2}{4} L$
 - Sendo: $D = 5,00 \pm 0,05 \text{ cm}$
 $L = 12,50 \pm 0,05 \text{ cm}$



- Valor médio:
$$V = \pi \frac{D^2}{4} L = \pi \frac{(5,00)^2}{4} (12,50) \text{ cm}^3 \approx 245,437 \text{ cm}^3$$
- Resultado final:

$$V = 245 \text{ cm}^3 \pm 6 \text{ cm}^3$$

- Esse procedimento de considerar “valores máximos e mínimos” nos dá uma ideia grosseira da incerteza do volume devida à incerteza das medidas do diâmetro e da altura. Mas dá para fazer melhor!

Propagação de Erros

- Dedução envolve derivadas parciais.
- Podemos utilizar uma tabela das expressões mais comuns.

$w = w(x, y, \dots)$	Expressões para σ_w
$w = x \pm y$ soma e subtração	$\sigma_w^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$ somar as incertezas absolutas em quadratura
$w = axy$ multiplicação	$\left(\frac{\sigma_w}{w}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2$ somar as incertezas relativas em quadratura
$w = a(y/x)$ divisão	$\left(\frac{\sigma_w}{w}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2$ somar as incertezas relativas em quadratura
$w = x^m$ potência simples	$\left \frac{\sigma_w}{w}\right = \left m \frac{\sigma_x}{x}\right $

$w = w(x, y, \dots)$	Expressões para σ_w
$w = ax$ multiplicação por constante	$\left \frac{\sigma_w}{w}\right = \left \frac{\sigma_x}{x}\right \quad \text{ou} \quad \sigma_w = a \sigma_x$
$w = ax + b$	$\left \frac{\sigma_w}{w}\right = \left \frac{\sigma_x}{x}\right \quad \text{ou} \quad \sigma_w = a \sigma_x$
$w = ax^p y^q$	$\left(\frac{\sigma_w}{w}\right)^2 = \left(p \frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(q \frac{\sigma_y}{y}\right)^2$
$w = a \sin(bx)$ função qualquer aplicar a definição	$\sigma_w = ab \cos(bx) \sigma_x \quad b \sigma_x \text{ em radianos}$

- Como fica o caso do volume?

Propagação de Erros

- Como fica o caso do volume?

$$V = \pi \frac{D^2}{4} L$$

$$\left(\frac{\sigma_V}{V}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_{D^2}}{D^2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_L}{L}\right)^2 \qquad \frac{\sigma_{D^2}}{D^2} = 2 \frac{\sigma_D}{D}$$

$$\left(\frac{\sigma_V}{V}\right)^2 = \left(2 \frac{\sigma_D}{D}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_L}{L}\right)^2 = 4 \left(\frac{\sigma_D}{D}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_L}{L}\right)^2$$

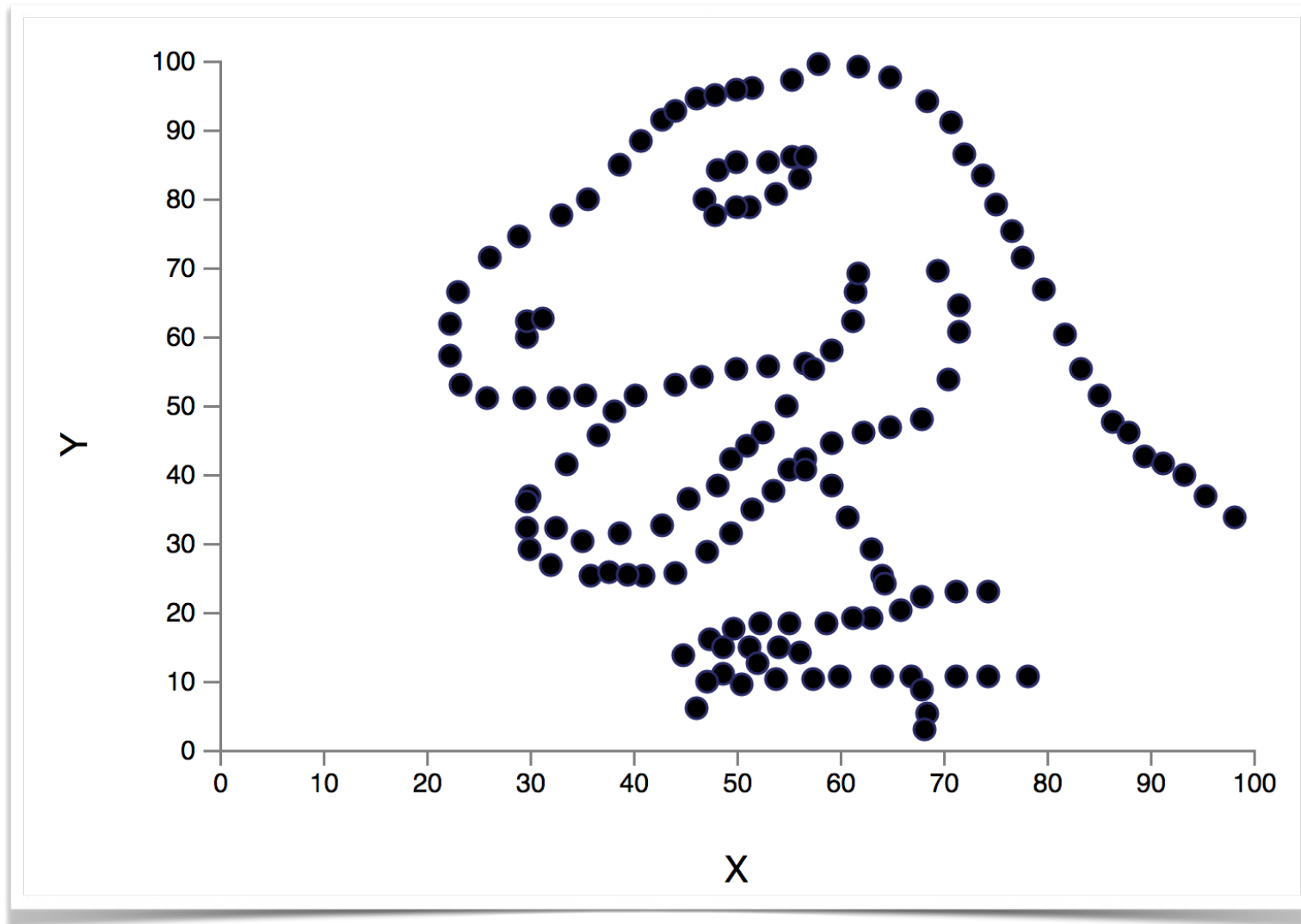
$$\frac{\sigma_V}{V} = \sqrt{4 \left(\frac{\sigma_D}{D}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_L}{L}\right)^2}$$

$$\sigma_V = V \sqrt{4 \left(\frac{\sigma_D}{D}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_L}{L}\right)^2} = 245 \sqrt{4 \left(\frac{0,05}{5,00}\right)^2 + \left(\frac{0,05}{12,50}\right)^2} = 5 \text{ cm}^3$$

Propagação de Erros

- Como fica o caso do volume?
 - Com: $\sigma_V = 5 \text{ cm}^3$
 - Teremos: $V = 245 \text{ cm}^3 \pm 5 \text{ cm}^3$

Gráficos



Gráficos

- O que todo gráfico precisa apresentar?
 - Título ou legenda (o que é este gráfico?)
 - Eixos com nomes das variáveis, escalas e unidades (quais as grandezas e unidades escolhidas para os eixos?)
 - Dados, com incertezas!
 - Função teórica, curvas médias, modelo ajustado (opcional).

Gráficos

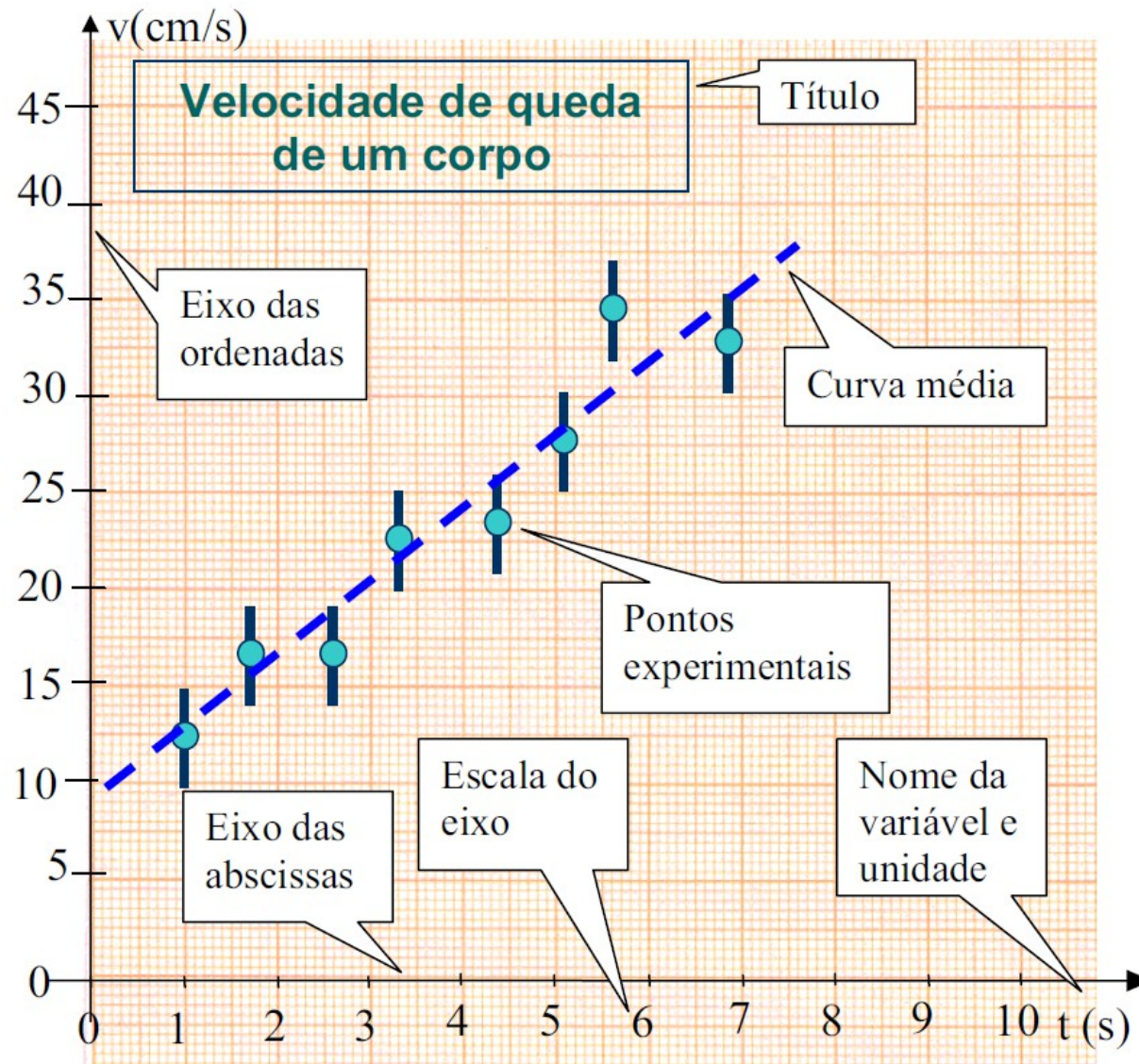
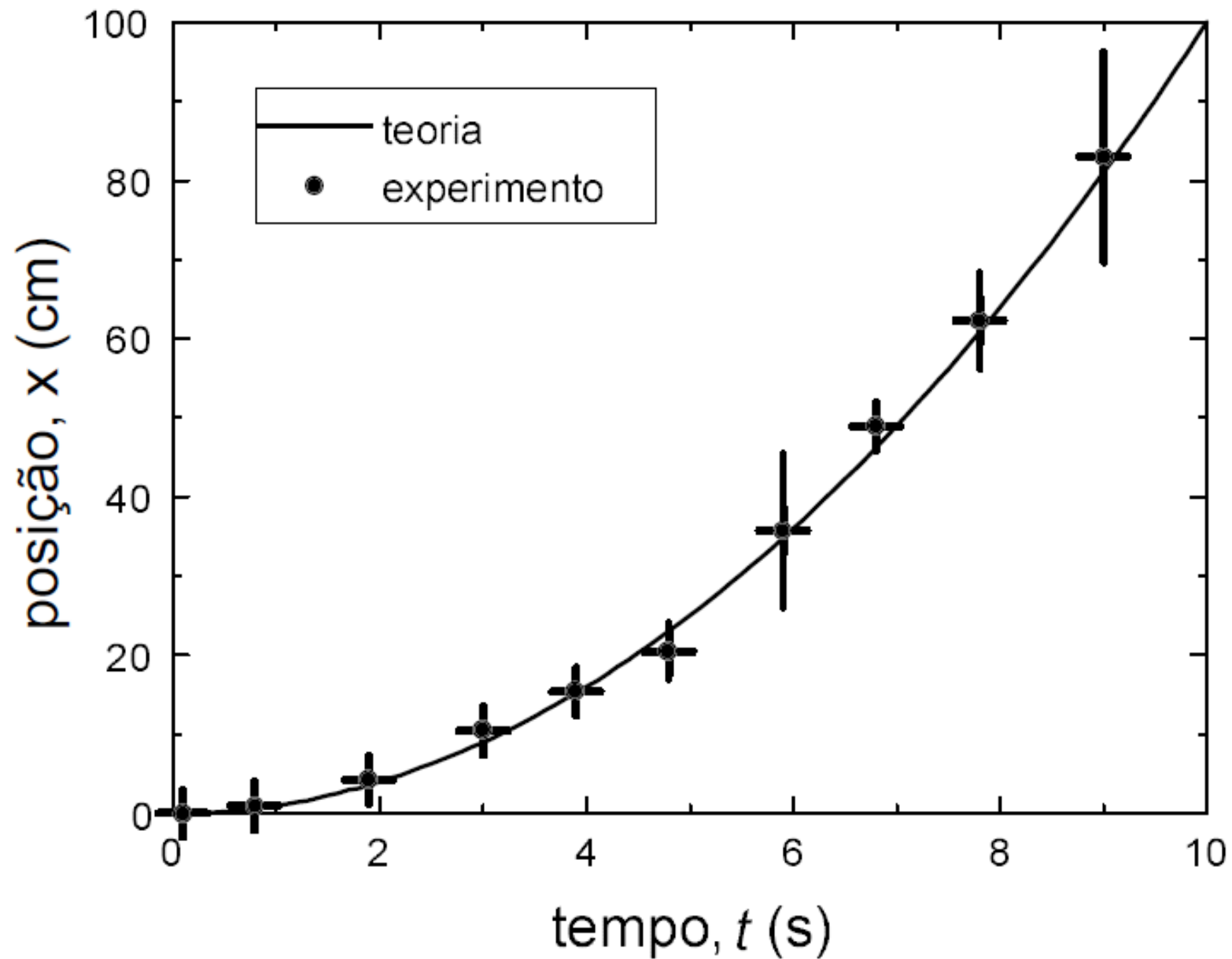


Figura 3.1. Componentes típicos de um gráfico científico padrão.

Gráficos



Gráficos

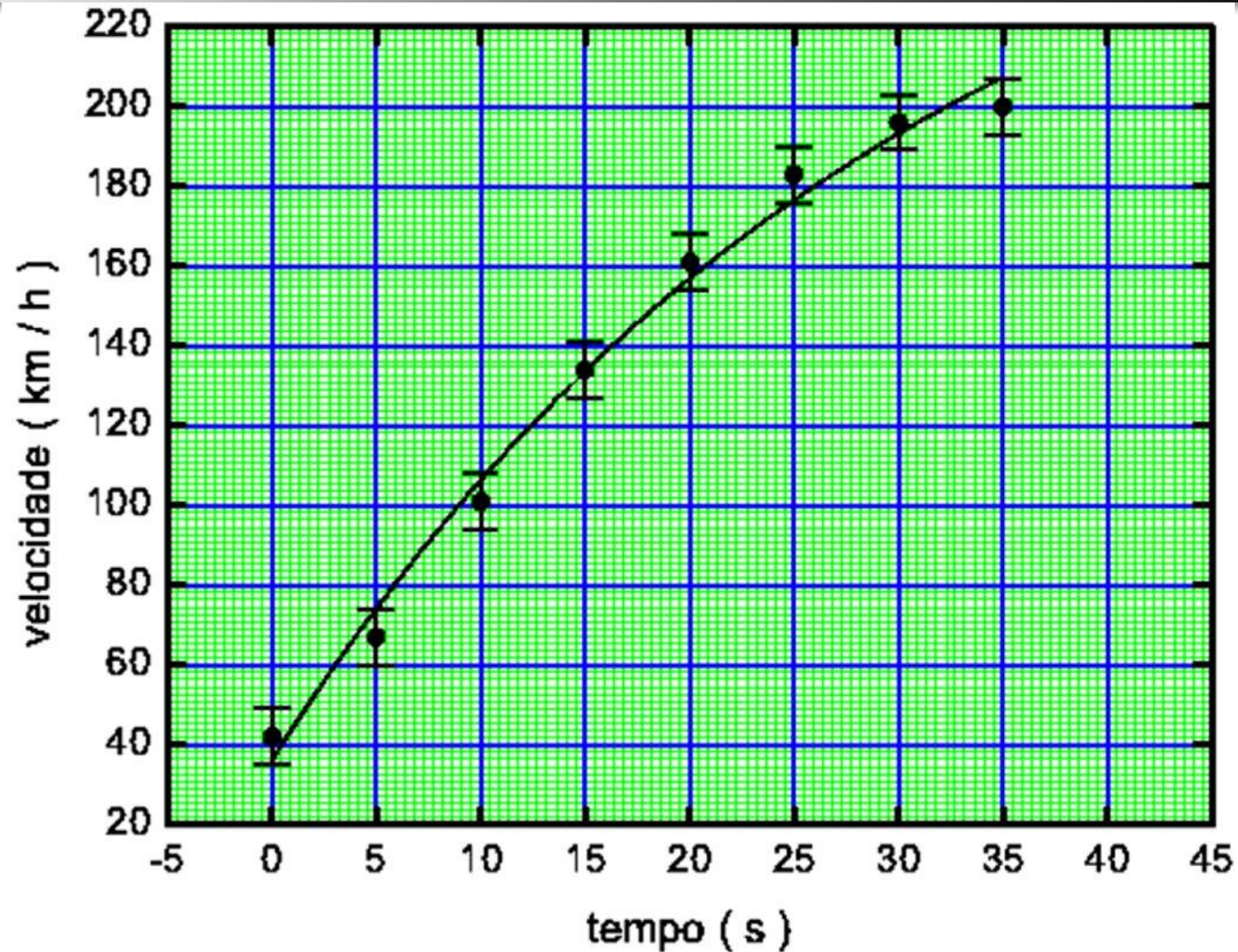
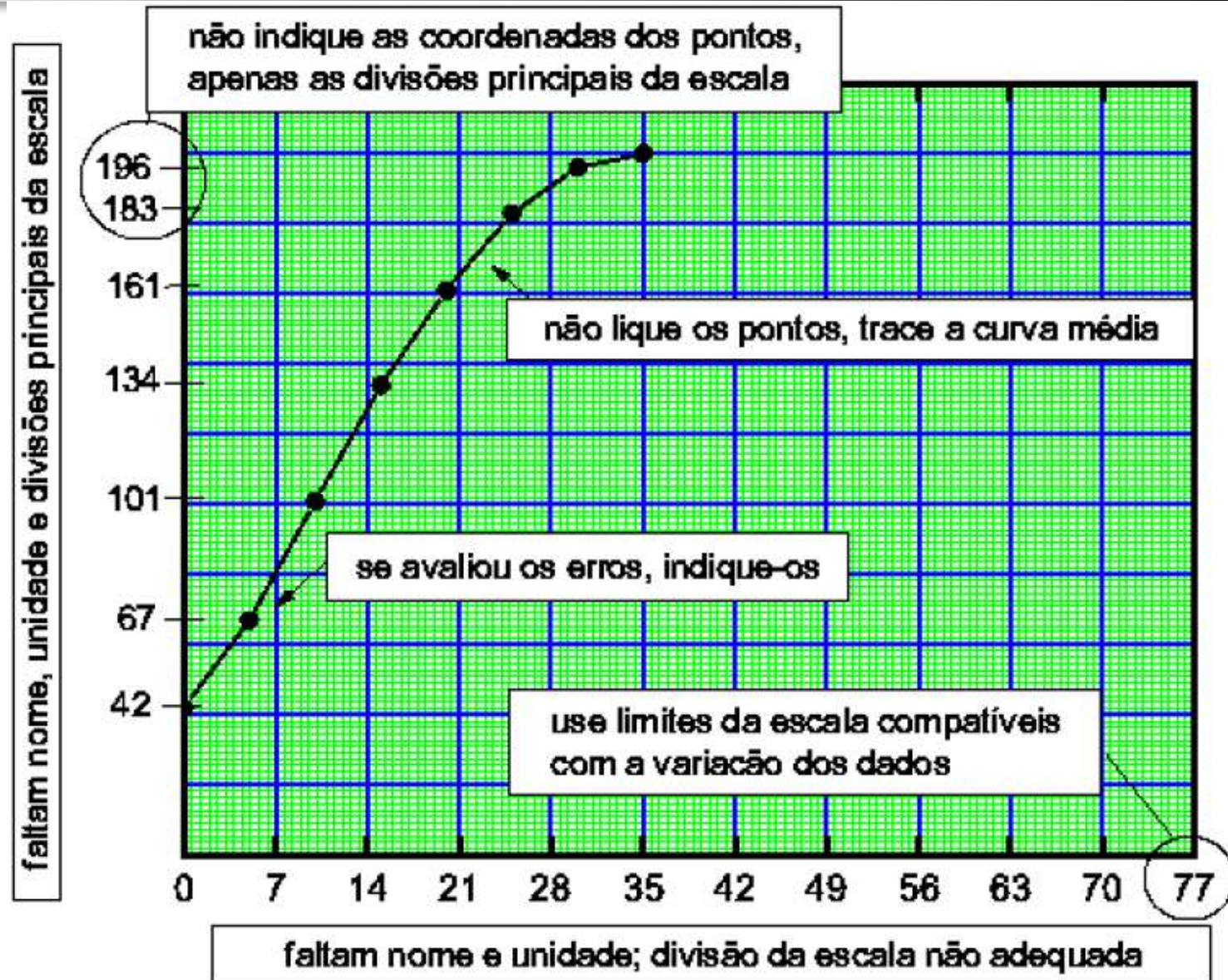


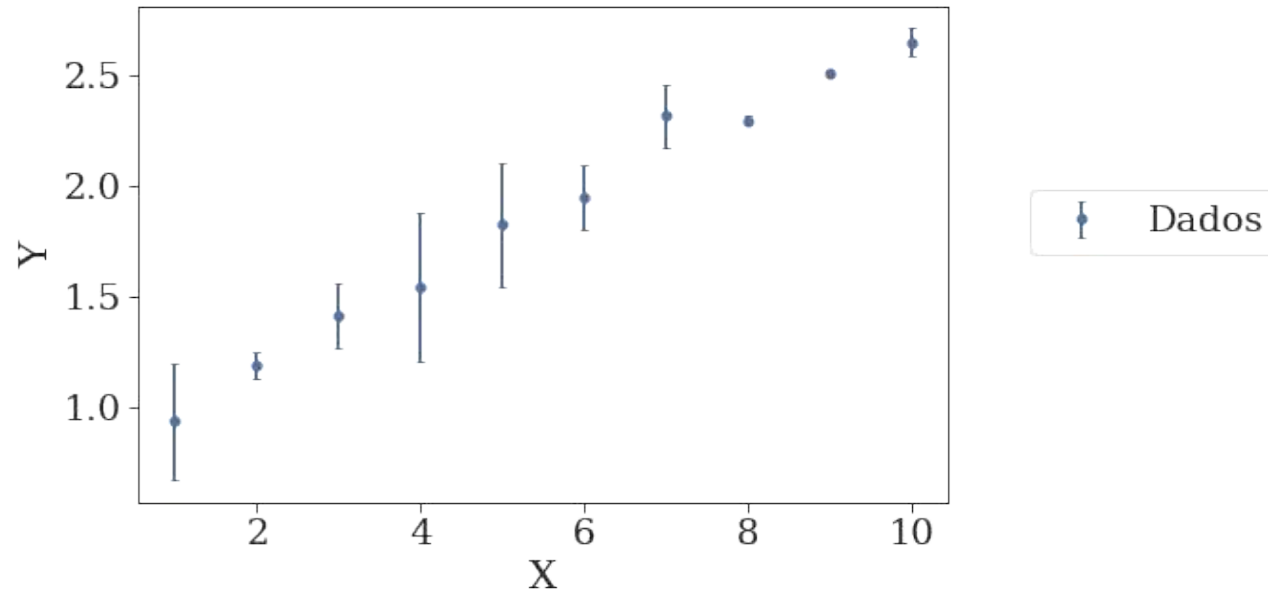
Figura 1: variação da velocidade em função do tempo de um corpo se deslocando em movimento variado

Gráficos



Método de Mínimos Quadrados

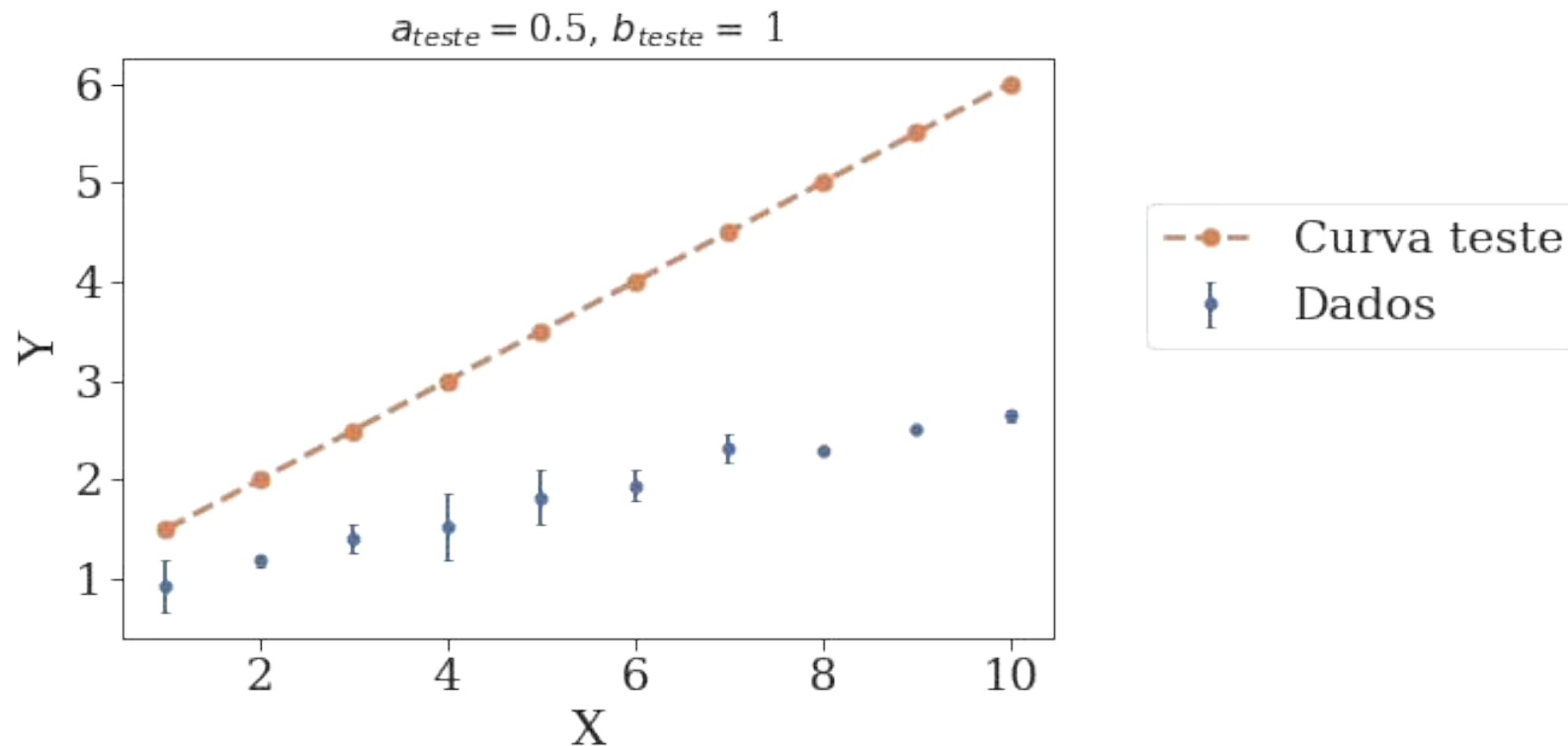
- Dado um conjunto de medidas (x,y) e seus erros (y_{erro}) queremos estimar qual modelo teórico descreve bem estes dados.



- O caso mais simples corresponde a um modelo linear, onde espera-se que a curva que corretamente descreve os dados é uma reta. Neste caso, o modelo mais geral corresponde a equação da reta: $f(x) = ax + b$
 - a = coeficiente angular
 - b = coeficiente linear

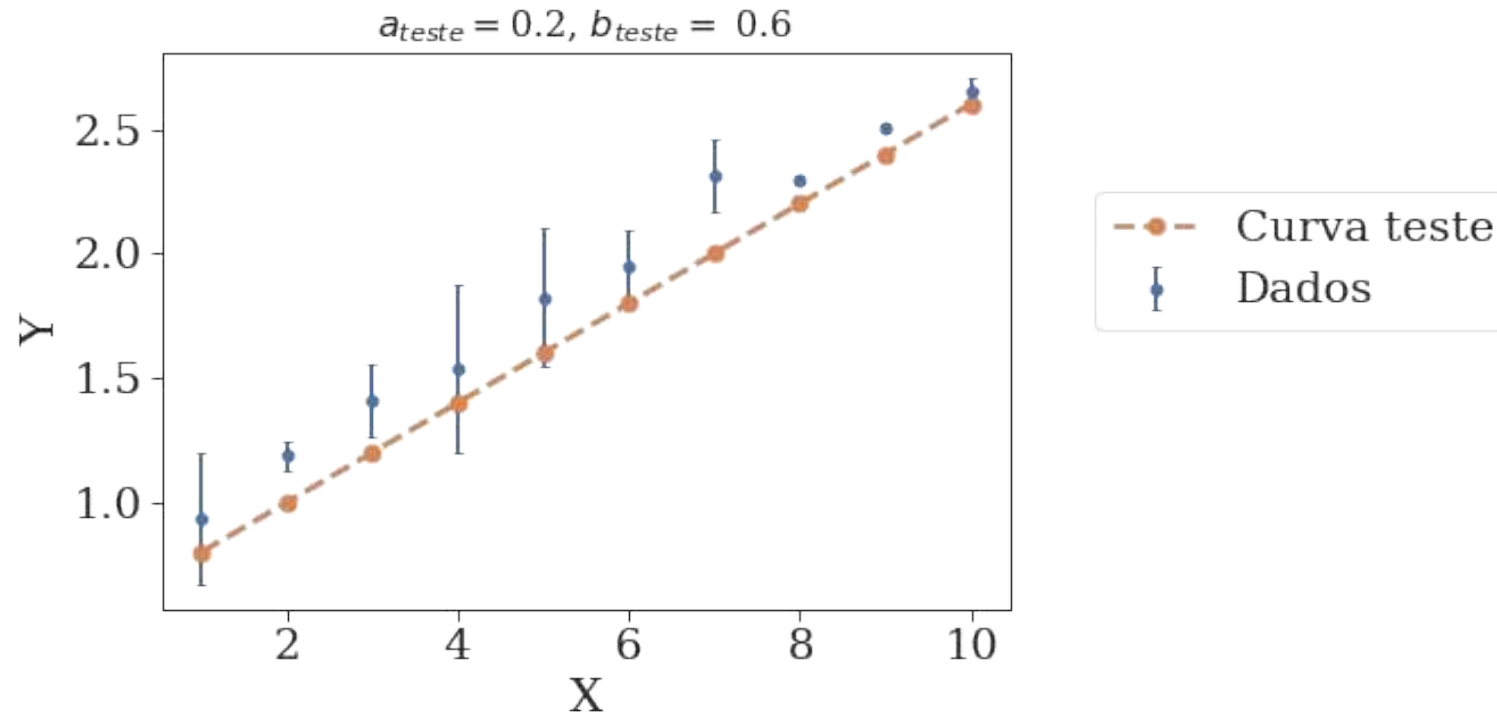
Método de Mínimos Quadrados

- A partir dos dados medidos queremos encontrar o valor dos coeficientes (a e b) que melhor descreve os dados experimentais.
- Se escolhermos $a=0,5$ e $b = 1$ e calcularmos $f(x)$ para os valores de x medidos, obtemos:



Método de Mínimos Quadrados

- Porém se escolhermos $a=0,2$ e $b = 0,6$, obtemos:



- A segunda escolha claramente descreve os dados de maneira mais adequada.
- Como podemos determinar os melhores valores de a e b possíveis de forma quantitativa?

Método de Mínimos Quadrados

- Existem diversos métodos estatísticos que nos permitem determinar os coeficientes a e b e que possuem uma sólida fundamentação teórica.
- Nós adotaremos o método dos “mínimos quadrados”.
- Vamos usar o seguinte parâmetro para estimar a qualidade do nosso ajuste, ou seja, o quão adequada é a nossa escolha para os parâmetros a e b:

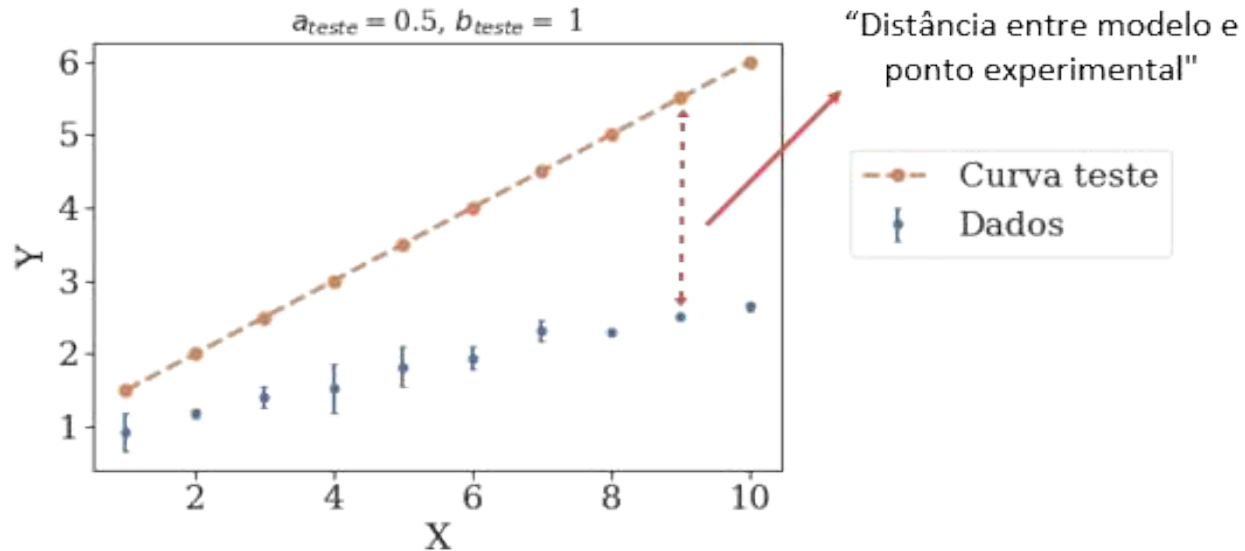
$$\chi^2(a, b) = \sum_{i=1}^N \left[\frac{y_i - (ax_i + b)}{\sigma_i} \right]^2$$

(“chi-quadrado” ou residual)

- N = número de dados
- x_i = valores medidos de X
- y_i = valores medidos de Y
- σ_i = erro experimental de y_i
- a = coeficientes angular
- b = coeficiente linear

Método de Mínimos Quadrados

- Utilizando o exemplo anterior:



$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \left[\frac{y_i - (ax_i + b)}{\sigma_i} \right]^2 = 55.306$$

- Devemos minimizar o χ^2 .

Método de Mínimos Quadrados

- Devemos escolher os valores de a e b que minimizam χ^2 .
- O mínimo de χ^2 é pode ser obtido através das derivadas com relação aos coeficientes (parâmetros) a e b. O resultado é:

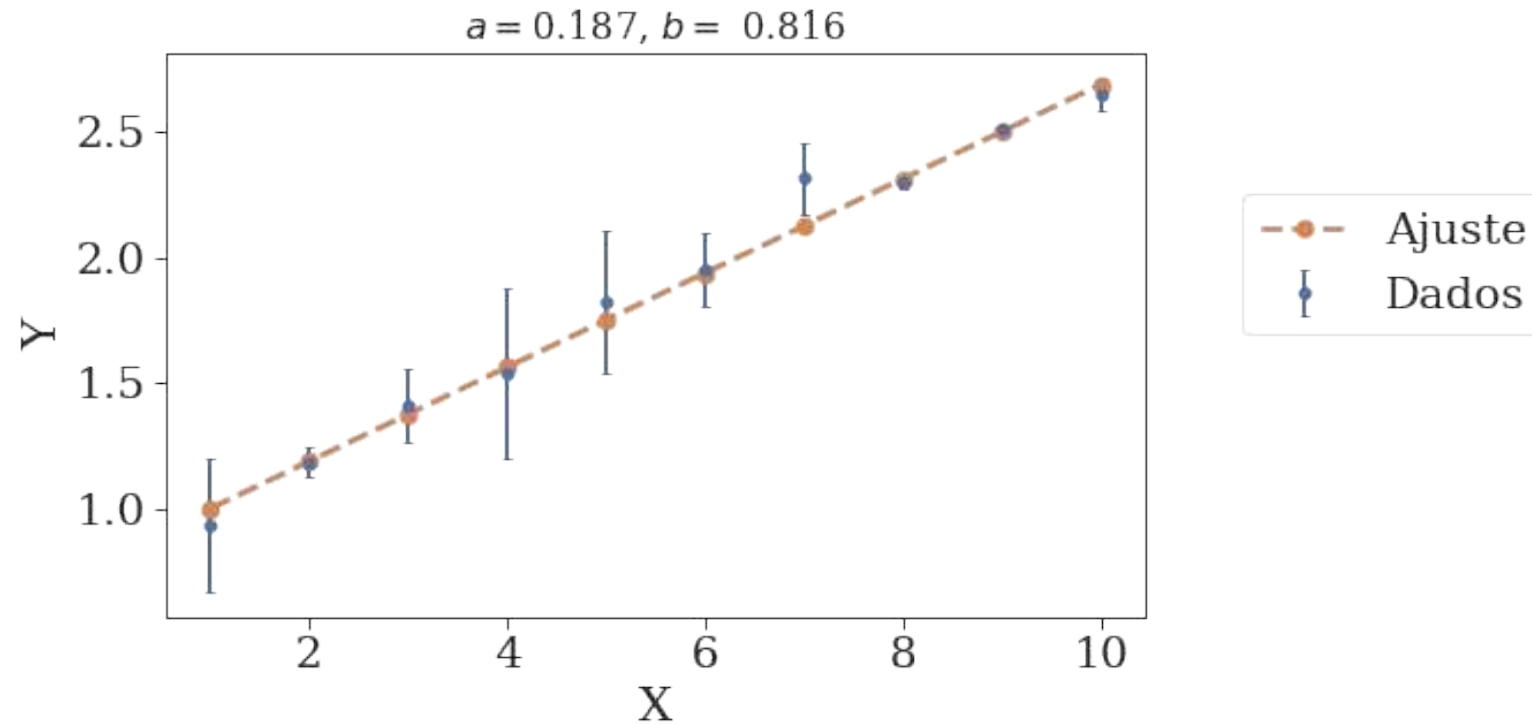
$$a = \frac{\left(\sum \frac{y_i}{\sigma_i^2}\right)\left(\sum \frac{x_i}{\sigma_i^2}\right) - \left(\sum \frac{1}{\sigma_i^2}\right)\left(\sum \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2}\right)}{\left(\sum \frac{x_i}{\sigma_i^2}\right)^2 - \left(\sum \frac{x_i^2}{\sigma_i^2}\right)\left(\sum \frac{1}{\sigma_i^2}\right)} \quad b = \frac{\left(\sum \frac{y_i}{\sigma_i^2}\right) - a\left(\sum \frac{x_i}{\sigma_i^2}\right)}{\left(\sum \frac{1}{\sigma_i^2}\right)}$$

- A soma é sobre todos os dados
- x_i = valores medidos de X
- y_i = valores medidos de Y
- σ_i = erro experimental de y_i
- a e b = coeficientes angular e linear

Método de Mínimos Quadrados

- Aplicando estas fórmulas para o exemplo anterior obtemos:

$$a = 0,187, b = 0,82 \quad (\chi^2 = 3)$$



Método de Mínimos Quadrados

- Finalmente também é possível estimar a incerteza nos coeficientes a e b, ou seja, o quanto podemos variar a e b e ainda obter um bom ajuste para os dados.

$$\Delta a = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{\langle \sigma^2 \rangle}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}} \quad \Delta b = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{\langle \sigma^2 \rangle \langle x^2 \rangle}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}}$$

$$\langle x \rangle = \left(\sum_i \frac{x_i}{\sigma_i^2} \right) / \left(\sum_i \frac{1}{\sigma_i^2} \right)$$

$$\langle x^2 \rangle = \left(\sum_i \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} \right) / \left(\sum_i \frac{1}{\sigma_i^2} \right)$$

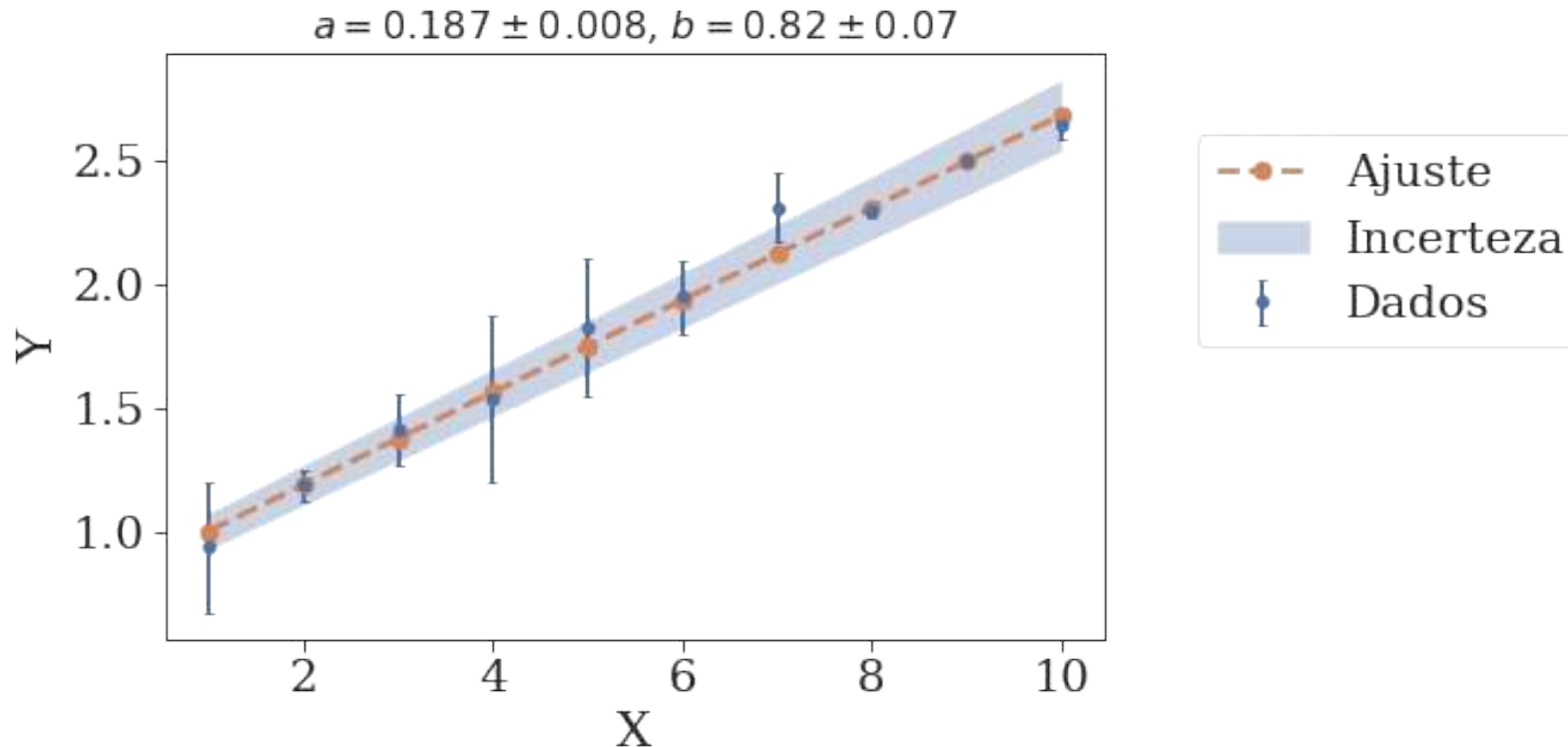
$$\langle \sigma^2 \rangle = \frac{N}{\sum_i 1/\sigma_i^2}$$

- A soma é sobre todos os dados
- x_i = valores medidos de X
- y_i = valores medidos de Y
- σ_i = erro experimental de y_i

Método de Mínimos Quadrados

- Aplicando este método para o exemplo anterior obtemos:

$$\Delta a = 0,008 \text{ , } \Delta b = 0,07$$



Aprendizado baseado em problemas

- Medir a gravidade a partir do movimento de uma bola de tênis de mesa.



- Sejam criativos e utilizem o que tiverem disponível.
 - Podem utilizar qualquer coisa para fazerem as medidas ou coleta de dados.

Aprendizado baseado em problemas

- Façam os seguintes gráficos:
 - Posição em função do tempo.
 - Velocidade em função do tempo.
- Obtenham a aceleração a partir desses gráficos.
 - Ensinarei você a fazerem os ajustes de modelos à gráficos em Prática de Ciência de Dados.
- Não esqueçam do que eu acabei de mostrar sobre gráficos!

Aprendizado baseado em problemas

- No relatório:
 - Breve revisão teórica (movimento acelerado).
 - Identifiquem os materiais utilizados.
 - Identifiquem as fontes de erro das medidas.
 - Gráficos.
 - Valores encontrado para a aceleração da gravidade.
 - Expliquem porque a precisão do cálculo foi bom ou ruim.

OBRIGADO

ilum.cnpem.br



MINISTÉRIO DA
EDUCAÇÃO

MINISTÉRIO DA
CIÊNCIA, TECNOLOGIA
E INOVAÇÃO

